



Munich Personal RePEc Archive

Scenarios of transition to sustainable oil extraction in Russia

Andreeva, Anastasiya and Bazhanov, Andrei
Far Eastern National University

08. October 2007

Online at <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/5343/>
MPRA Paper No. 5343, posted 07. November 2007 / 04:39

Сценарии перехода к устойчивым темпам добычи нефти в России

Андреева А.А., Бажанов А.В.

Дальневосточный государственный университет

Введение

Беспокойство об ограниченных запасах невозобновляемых ресурсах начало проявляться с момента опубликования работы Томаса Мальтуса (Thomas Malthus) в 1789 году. Многие ученые пытаются оценить время пика в добыче ресурсов, влияние предстоящего сокращения их запасов на потребление населения и производительность экономики. Для этого рассматриваются различные траектории истощения ресурсов, например, кривая Хабберта [8], возрастающие в начальный момент времени, и убывающие после достижения своего пика. Важно то, что в силу предположения о существенности нефти для экономики, для устойчивого экономического развития необходимо (но не достаточно) чтобы эти траектории асимптотически стремились к нулю (но не обнулялись), что, пока, противоречит мировой и российской практике нефтедобычи.

В [2,5] предлагается методика построения переходных траекторий добычи невозобновляемых ресурсов, основанная на использовании рациональных функций. Методика позволяет оценить поведение потребления вдоль этих траекторий и построить траектории истощения ресурса, оптимальные в смысле различных критериев, которые может рассматривать государство нефтедобывающей страны. Методика иллюстрируется примерами, основанными на данных о мировых запасах и темпах добычи нефти.

В данной работе методика, предложенная в [2,5], используется для исследования сценариев перехода к устойчивым в экономическом смысле темпам добычи нефти в России с учётом прогнозов Российской Энергетической Программы. Кроме того, исследуется сравнительная эффективность (в смысле уровня потребления) истощения ресурса вдоль переходных кривых, основанных на других функциональных зависимостях, в частности, на функциях плотности известных распределений случайных величин и функции Хабберта.

Согласно правилу Хартвика [7], постоянный во времени уровень потребления $c(t)$ достигается путем инвестирования прибыли (ренты), полученной от невозобновляемого ресурса в капитал, направленный на производство того же самого количества товаров и услуг при уменьшающемся количестве ресурса. То есть, если согласно правилу направлять ресурсную ренту на развитие капитала в виде технологий, не использующих нефть, то увеличение рынка таких товаров будет вытеснять «нефтяные» товары и реализовывать убывающую траекторию для темпов добычи нефти.

В данной работе правило Хартвика рассматривается для модели Солоу [10] с производственной функцией Кобба-Дугласа $q(t) = f(k(t), r(t)) = k^\alpha r^\beta$, где $k(t)$ - капитал к моменту t , $r(t)$ - текущие темпы добычи ресурса. Если запас ресурса обозначить за S , то $r(t) = -\dot{S}(t) = -\frac{dS}{dt}$. α, β - константы, такие, что $\alpha + \beta < 1$, $0 < \alpha, \beta < 1$, $\alpha > \beta$.

Стоимости, соответственно, капитала и ресурса определяются как $f_k = \partial f / \partial k = \alpha k^{\alpha-1} r^\beta = \alpha q / k$ и $f_r = \partial f / \partial r = \beta k^\alpha r^{\beta-1} = \beta q / r$. Из правила Хартвика следует, что $\dot{k} = r f_r = \beta q$. Следовательно, функция потребления имеет вид $c(t) = q - \dot{k} = q(1 - \beta)$. Из последнего следует, что для проверки постоянства потребления вместо $\dot{c} = 0$ можно проверить $\dot{q} = 0$.

Траектория асимптотического убывания определяется из условия известных темпов добычи в начальный момент времени r_0 и изменения темпов добычи A_0 :

$$r(t_0) = r(0) = r_0, \quad \dot{r}(t_0) = \dot{r}(0) = A_0, \quad (1)$$

а также требования о расходовании конечного запаса ресурса S_0 в течение бесконечного периода времени

$$\int_0^{\infty} r(t) dt = S_0 \quad (2)$$

При этом предполагается, что

- 1) темпы добычи в начальный момент $t_0 = 0$ возрастающие ($\dot{r}_0 = A_0 > 0$), то есть неустойчивые в смысле долгосрочного экономического развития и неэффективные в смысле уровня потребления;
- 2) переход к устойчивым и эффективным темпам добычи не может быть мгновенным в силу того, что технологии, основанные на возобновляемых ресурсах требуют времени на разработку и внедрение в производство. Поэтому изменение темпов добычи может происходить только постепенно ($\dot{r} \leq \dot{r}_{\max} < \infty$). С учётом введенных предположений запишем следующие определения [3,6].

Определение 1. Мы будем называть экономической программой использования ресурса или просто программой и обозначать $\langle f(t), c(t), k(t), r(t) \rangle_{t=0}^{\infty}$ набор функций $f(t)$, $c(t)$, $k(t)$ и $r(t)$, определенных для $t \geq 0$ и таких, что $f(t) = f[k(t), r(t)]$ и $c(t) = f(t) - \dot{k}(t)$.

Определение 2. Множество программ $F = \left\{ \langle f(t), c(t), k(t), r(t) \rangle_{t=0}^{\infty} \right\}$ будем называть допустимым пучком программ в точке $t = 0$ с допустимыми пучками функций $f(t)$, $c(t)$, $k(t)$, $r(t)$, если для положительных начальных запасов капитала $k_0 > 0$ и ресурса $S_0 > 0$ любая программа из F для любых $t \geq 0$ удовлетворяет условиям:

- 1) $f(t) > 0$, $c(t) > 0$, $k(t) > 0$, $r(t) > 0$;
- 2) $r(t), k(t), c(t)$ непрерывно дифференцируемы по t , причём $|\dot{r}(t)| \leq \dot{r}_{\max} < \infty$;
- 3) $f(t)$ дважды непрерывно дифференцируема по k, r, t ;
- 4) $\int_t^{\infty} r(t) dt \leq S(t)$;
- 5) $k(0) = k_0$, $c(0) = c_0$, $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = A_0$.

Определение 3. Допустимая программа $\langle f(t), c(t), k(t), r(t) \rangle_{t=0}^{\infty}$ из F является неэффективной, если существует программа $\langle f^*(t), c^*(t), k^*(t), r^*(t) \rangle_{t=0}^{\infty}$ из F такая, что $c^*(t) \geq c(t)$ для всех $t \geq 0$ и существует $\bar{t} \geq 0$ такое, что $c^*(\bar{t}) > c(\bar{t})$.

Определение 4. Совокупность допустимых программ $E = \left\{ \langle f(t), c(t), k(t), r(t) \rangle_{t=0}^{\infty} \right\}$ является эффективной, если все программы $\langle f(t), c(t), k(t), r(t) \rangle$ из E не являются неэффективными.

Важными факторами для оценки траекторий являются значение пика r_{\max} , [3,4] время достижения пика, а также величина и время достижения «шока» (наибольшее снижение темпов добычи ресурса в единицу времени $A_{\min} = \dot{r}_{\min}$, способного повлиять на рост экономики.

Предположим, что правительство нефтедобывающей страны рассматривает в качестве долговременной цели устойчивое развитие экономики и, следовательно, переход к устойчивым и эффективным темпам добычи. При этом правительство пытается минимизировать негативное воздействие этого перехода на краткосрочные экономические

показатели. Процентное изменение ВВП \dot{q}/q в экономике с технологией Кобба-Дугласа может быть записано следующим образом

$$\frac{\dot{q}}{q} = \alpha \frac{\dot{k}}{k} + \beta \frac{\dot{r}}{r},$$

откуда видно, что уменьшающиеся темпы добычи снижают темпы роста \dot{q}/q . Тогда для определения переходной траектории можно рассмотреть следующие «краткосрочные» критерии, «смягчающие» негативные последствия процесса перехода к устойчивым темпам добычи [4,5]:

а) минимизация отрицательного ускорения (по абсолютной величине)

$$F_1(r(t)) = \min_t A(t) \rightarrow \max_{r(t)}, \quad (3a)$$

б) минимизация «шока» на ВВП

$$F_2(r(t)) = \min_t \left[\frac{\dot{r}(t)}{r(t)} \right] \rightarrow \max_{r(t)}, \quad (3b)$$

Прежде чем начать построение и оценку заданных траекторий, рассмотрим уже известные траектории: кривую Хартвика и кривую, предложенную в [3,6].

2. Исследование существующих траекторий

2.1. Кривая Хартвика

Кривая Хартвика строится на основе правила Хотеллинга

$$\dot{f}_r / f_r = f_k, \quad (4)$$

где $\dot{f}_r = \frac{df_r}{dt} = \frac{\beta}{r} \left(\frac{\alpha q \dot{k}}{k} + \frac{(\beta-1) \dot{r} q}{r} \right)$. Формулу (4) можно переписать как

$\frac{\dot{f}_r}{f_r} = \left(\frac{\alpha \dot{k}}{k} + \frac{(\beta-1) \dot{r}}{r} \right) = f_k = \frac{\alpha q}{k}$ или, следуя правилу Хартвика, как

$$\frac{\dot{f}_r}{f_r} = \left(\frac{\alpha \beta q}{k} + \frac{(\beta-1) \dot{r}}{r} \right) = \frac{\alpha q}{k}, \text{ что означает}$$

$$\frac{\dot{r}}{r} = -\frac{\alpha q}{k}. \quad (5)$$

С другой стороны, $\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial k} \cdot \frac{dk}{dt} + \frac{\partial q}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} = \alpha k^{\alpha-1} \dot{k} r^\beta + \beta r^{\beta-1} \dot{r} k^\alpha = \frac{\alpha q \dot{k}}{k} + \frac{\beta q \dot{r}}{r}$, тогда

$$\frac{\dot{q}}{q} = \frac{\alpha \dot{k}}{k} + \frac{\beta \dot{r}}{r}, \quad (6)$$

Учитывая, что $\dot{k} = \beta q$ и подставив (5) в (6), получим $\dot{q} = 0$, а, следовательно, и $\dot{c} = 0$, что показывает постоянство потребления вдоль кривой $r(t)$, определяемой уравнением (5). Решением этого уравнения, с учетом условий (1)-(2), является траектория добычи, изображенная на Рис. 2. Уравнение траектории имеет вид¹:

$$r(t) = r_0 \left[1 + \frac{r_0 \beta t}{S_0 (\alpha - \beta)} \right]^{-\alpha / \beta}.$$

¹ В работе для построения графиков и расчетов параметров кривых берутся данные мировых исследований [Oil & Gas J., 2006, 104, 47: р. 20-23], полученные к 1 Января 2007 года: начальные темпы добычи $r_0=3.6243$ млрд. тонн/год, запасы нефти, имеющиеся в начальный момент времени, $S_0 = 180.47$ млрд. тонн, 1 тонна = 7.3 барреля, изменение темпов добычи на начало 2007 года $A_0 = 0.08$ млрд. тонн/(год)², $\alpha=0.3$, $\beta=0.05$ [9]. Началом отсчёта для всех графиков по времени является 1 Января 2007 года.

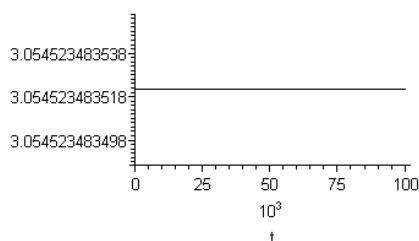


Рис. 1. Постоянное потребление вдоль кривой Хартвика.

График показывает, что функцией потребления для данного примера является константа $c(t) = 3.0545$.

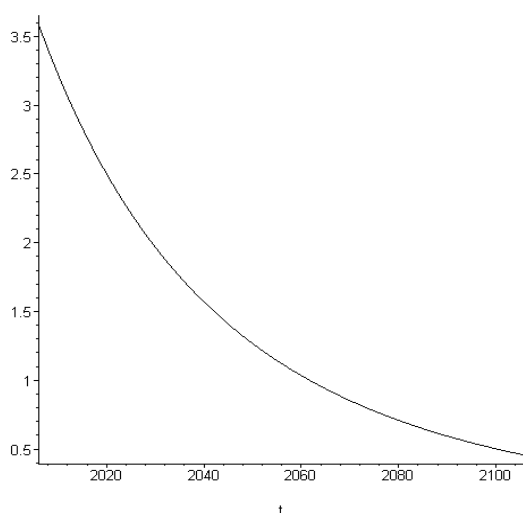


Рис. 2. Траектория добычи нефти для кривой Хартвика (млрд. тонн/год).

Недостатком данной кривой является то, что она является убывающей начиная с $t=0$, не оставляя времени для внедрения технологий, компенсирующих спад в добыче. Поэтому такая кривая, согласно предположениям данной работы является технически нереализуемой и мы будем искать оптимальные траектории в классах функций, имеющих свойства, аналогичные свойствам кривой Хартвика, но со сдвигом r_{\max} вправо, то есть со смещением пика. Одной из таких траекторий, является кривая, описываемая ниже [3,6].

2.2. Рациональная переходная кривая

2.2.1. Критерий минимального ускорения

Важное условие в отыскании траекторий - асимптотическое стремление к нулю темпов добычи и ускорений: $A(t) = \dot{r}(t) \rightarrow -0$ при $t \rightarrow \infty$ и $r(t) \rightarrow +0$ при $t \rightarrow \infty$, означающее постепенное уменьшение истощения нефти. Рациональная траектория добычи [3] имеет вид

$$r(t) = \frac{r_0 \left(1 + \left[c(d-1) + \frac{A_0}{r_0} \right] t \right)}{(1+ct)^{d-1}}, \quad b < 0, c > 0, d > 3.$$

Ускорение добычи $\dot{r} = A(t) = (A_0 + bt)/(1 + ct)^d$. Коэффициенты b, c находят из условий (1)-(2) [3]:

$$b(d) = -c(d) \cdot (d-2) \cdot [r_0 \cdot c(d) \cdot (d-1) + A_0],$$

$$c(d) = \left[\frac{r_0}{d-3} + \left\{ \frac{r_0^2}{(d-3)^2} + \frac{A_0 S_0}{(d-3)(d-2)} \right\}^{0.5} \right] / S_0.$$

Параметр d , согласно критерию (3а), вычисляется из условия

$$[c_d(d-2) + c] + \left[c(d-2) + \frac{A_0}{r_0} \right] \cdot \left[\ln(f(d)) + d \frac{f_d(d)}{f(d)} \right] = 0, \quad (7)$$

где

$$f(d) = (d-2) \frac{r_0 c(d-1) + A_0}{d[r_0 c(d-2) + A_0]}.$$

Параметр d не выражается из уравнения (7) в явном виде. Численное решение задачи (3а) имеет вид: $d = 12.845$. Тогда $b = -0.0197$, $c = 0.0052$. Подставляя полученные значения, получаем $r(t)$ и $A(t)$, изображенные на Рис.3 и Рис. 4 соответственно.

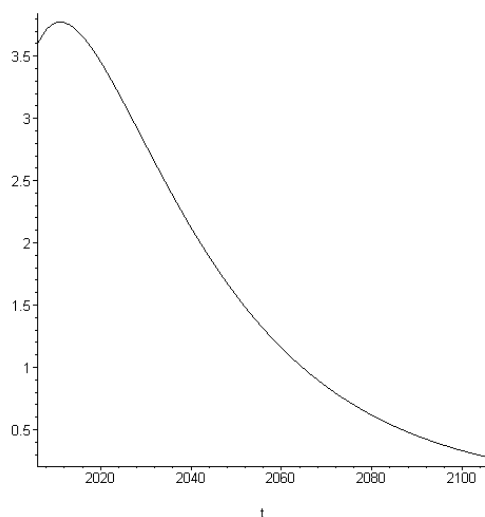


Рис. 3. Траектория добычи нефти для рациональной кривой (млрд. тонн/год).

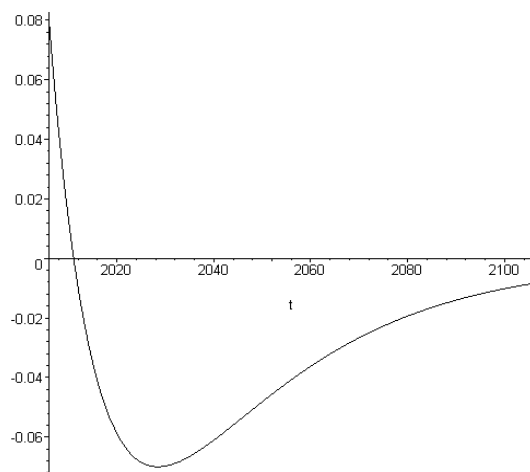


Рис. 4. Изменение темпов добычи нефти вдоль рациональной кривой (млрд.тонн/год²).

При этом $A_{\min} = -0.076$ при $t = 2028.8$ по абсолютной величине меньше, чем $A_{\min} = -0.08$ для кривой Хартвика при $t = 2006$. Пик достигается при $t = 2011$ и равен $r_{\max} = 3.77$.

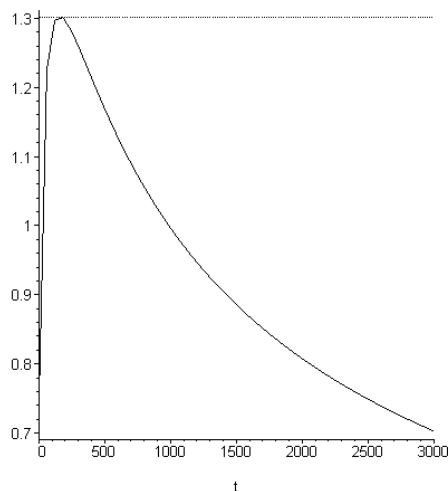


Рис. 5. Убывающее в долгосрочном периоде потребление вдоль рациональной кривой, оптимальной относительно критерия 3а.

Потребление вдоль данной кривой, как видно из Рис.5, после достижения своего наивысшего значения $c_{\max} = 1.3005$ падает. Если опустить условие (3а) при построении траектории, то с помощью параметра d , которому можно присваивать произвольные значения (но должно соблюдаться $d > 3$, $c > 0$, $b > 0$), ссылаясь на Теорему 3 в [5], можно регулировать потребление. Из Теоремы следует, что потребление $c(t)$

- а) убывает в долгосрочном периоде, если $d > \alpha / \beta + 2$;
- б) асимптотически постоянно, если $d = \alpha / \beta + 2$;
- с) возрастает в долгосрочном периоде, если $3 < d < \alpha / \beta + 2$.

Рассмотрим случаи, когда поведение

- (1) асимптотически постоянно (Рис.6) (время в годах, потребление в единицах ВВП),
- (2) возрастает (Рис.7).

Случай (1). $d = 0.3/0.05 + 2 = 8$, $c = 0.0158$, $b = -0.0232$ дают функцию потребления асимптотически приближающуюся к константе $c(t) = 1.539$.

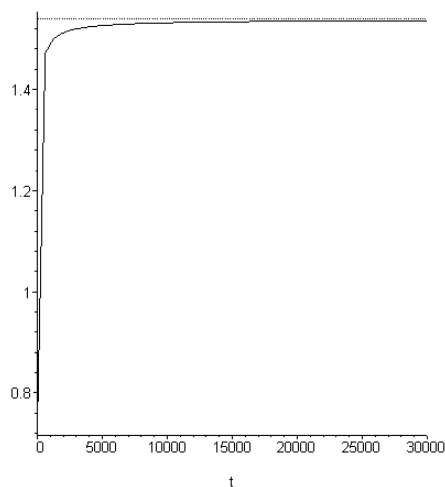


Рис.6. Асимптотически постоянное потребление вдоль рациональной кривой.

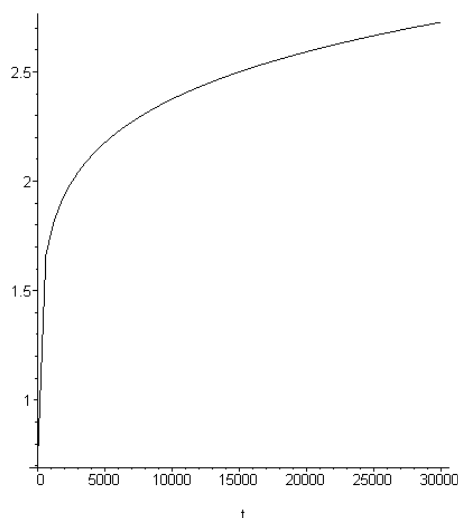


Рис. 7. Возрастающее потребление вдоль рациональной кривой.

Случай (2). При $d = 4$, $c = 0.0455$, $b = -0.0518$ получаем монотонно и неограниченно возрастающую функцию потребления.

Таким образом, краткосрочный критерий, а именно критерий наименьшего по модулю ускорения вдоль кривой добычи (3а) может противоречить долгосрочным целям правительства, связанными с устойчивым экономическим развитием [4].

2.2.2. Критерий минимального «шока» на ВВП

Параметр d находим, решая задачу (3b) численно: $d = 6.1$. Тогда $b = -0.023$, $c = 0.015$. Подставляя полученные значения, получаем $r(t)$ и $A(t)$, изображенные на Рис.8 и Рис.9 соответственно.

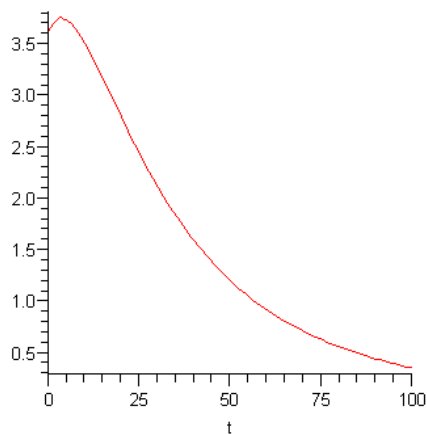


Рис. 8. Траектория добычи нефти для рациональной кривой (млрд. тонн/год)-(3b).

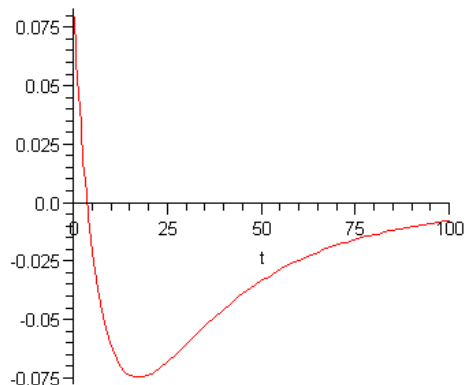


Рис. 9. Изменение темпов добычи нефти вдоль рациональной кривой (млрд. тонн/год²)-(3b).

Так как $d = 6.1 < 8$, то потребление возрастает в долгосрочном периоде (Рис. 10).

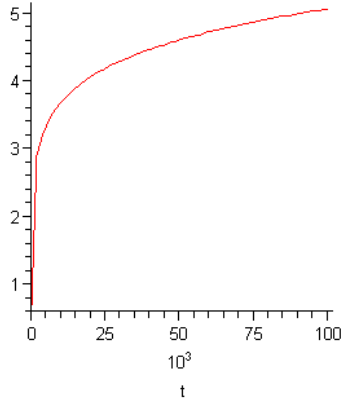


Рис. 10. Возрастающее потребление вдоль рациональной кривой.

Таким образом, критерий (3b) более адекватно отражает краткосрочные цели правительства и не противоречит долгосрочным целям по достижению устойчивого неубывающего потребления.

3. Построение траекторий с двумя параметрами

3.1. Кривая Хабберта

Данная кривая основана на подходе Хабберта [8] к построению моделей для прогнозирования темпов добычи нефти. Обзор литературы и примеры ее использования можно найти, например, в [1]. Кривая описывается следующим выражением:

$$P(t) = \frac{2P_{\max}}{1 + ch(b(t - t_{\max}))},$$

где $P(t)$ – годовой объём добычи нефти,

P_{\max}, t_{\max} – максимальный объём добычи и соответствующий год,

b – параметр наклона кривой.

Недостатком модели Хабберта является то, что она не учитывает экономические и политические факторы, которые и определяют, добывается ресурс или нет. Эти недостатки могут приводить к достаточно большим погрешностям при решении задач прогнозирования [6].

Рассматривается траектория добычи нефти как функция

$$r(t) = \frac{r_0(1 + ch(-cb))}{1 + ch(c(t - b))}, b \in [0, \infty), c \in (0, \infty), \text{ а её производная } \frac{dr(t)}{dt} \text{ как ускорение добычи}$$

$$A(t) = -\frac{r_0(1 + ch(cb))sh(c(t - b))c}{(1 + ch(c(t - b)))^2}, b \in [0, \infty), c \in (0, \infty) \text{ (для выполнения } A(t) \rightarrow -0 \text{)}.$$

Известно, что $A(0) = A_0$, то есть $\frac{r_0 sh(cb)c}{1 + ch(cb)} = A_0$, что позволяет выразить b :

$$\begin{aligned} \frac{r_0 sh(cb)c}{1 + ch(cb)} &= \frac{r_0 c \sqrt{ch^2(cb) - 1}}{\sqrt{(ch(cb) + 1)^2}} = \frac{r_0 c \sqrt{ch(cb) - 1}}{\sqrt{ch(cb) + 1}} = \sqrt{2} r_0 sh\left(\frac{cb}{2}\right) c / \sqrt{2} ch\left(\frac{cb}{2}\right) = r_0 th\left(\frac{cb}{2}\right) c = \\ &= r_0 \left(e^{2\left(\frac{cb}{2}\right)} - 1 \right) c / \left(e^{2\left(\frac{cb}{2}\right)} + 1 \right) = A_0. \end{aligned}$$

Следовательно, $r_0(e^{cb} - 1)c = A_0(e^{cb} + 1)$ или $e^{cb}(r_0c - A_0) = A_0 + r_0c$, что можно записать как $e^{cb} = (A_0 + r_0c)/(-A_0 + r_0c)$, и тогда

$$b = \ln\left(\frac{A_0 + r_0c}{r_0c - A_0}\right) / c.$$

Подставляя b в $r(t)$, получим

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{2r_0^3c^2}{(-A_0^2 + r_0^2c^2) \left(1 + ch\left(ct - \ln\left(\frac{A_0 + r_0c}{-A_0 + r_0c}\right)\right)\right)}, \text{ тогда условие (2) имеет вид:} \\ \int_0^\infty \frac{2r_0^3c^2}{(-A_0^2 + r_0^2c^2) \left(1 + ch\left(ct - \ln\left(\frac{A_0 + r_0c}{-A_0 + r_0c}\right)\right)\right)} dt &= \int_0^\infty \frac{r_0^3c^2}{(-A_0^2 + r_0^2c^2) \frac{\left(1 + ch\left(ct - \ln\left(\frac{A_0 + r_0c}{-A_0 + r_0c}\right)\right)\right)}{2}} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{r_0^3c^2}{(-A_0^2 + r_0^2c^2) ch^2 \left(\frac{ct - \ln\left(\frac{A_0 + r_0c}{-A_0 + r_0c}\right)}{2}\right)} dt = \frac{2r_0^3c^2 th \left(\frac{ct - \ln\left(\frac{A_0 + r_0c}{-A_0 + r_0c}\right)}{2}\right)}{c(-A_0^2 + r_0^2c^2)} \Bigg|_{t=0}^\infty = \\ &= \frac{2r_0^3c \left(th\left(\frac{ct}{2}\right) - th\left(\frac{\ln\left(\frac{A_0 + r_0c}{-A_0 + r_0c}\right)}{2}\right) \right)}{(-A_0^2 + r_0^2c^2) \left(1 - th\left(\frac{ct}{2}\right) th\left(\frac{\ln\left(\frac{A_0 + r_0c}{-A_0 + r_0c}\right)}{2}\right)\right)} \Bigg|_{t=0}^\infty = \frac{2r_0^3c \left(1 - th\left(\frac{\ln\left(\frac{A_0 + r_0c}{-A_0 + r_0c}\right)}{2}\right)\right)}{(-A_0^2 + r_0^2c^2) \left(1 - th\left(\frac{\ln\left(\frac{A_0 + r_0c}{-A_0 + r_0c}\right)}{2}\right)\right)} - \\ &- \frac{2r_0^3c \left(-th\left(\frac{\ln\left(\frac{A_0 + r_0c}{-A_0 + r_0c}\right)}{2}\right)\right)}{(-A_0^2 + r_0^2c^2)} = \frac{2r_0^3c}{(-A_0^2 + r_0^2c^2)} + \frac{2r_0^3c \left(th\left(\frac{\ln\left(\frac{A_0 + r_0c}{-A_0 + r_0c}\right)}{2}\right)\right)}{(-A_0^2 + r_0^2c^2)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2r_0^3 c}{(-A_0^2 + r_0 c^2)} \left(1 + \frac{e^{\frac{2 \ln \left(\frac{A_0 + r_0 c}{-A_0 + r_0 c} \right)}{2}} - 1}{e^{\frac{2 \ln \left(\frac{A_0 + r_0 c}{-A_0 + r_0 c} \right)}{2}} + 1} \right) = \frac{2r_0^3 c}{(-A_0^2 + r_0 c^2)} \left(1 + \frac{e^{\frac{\ln \left(\frac{A_0 + r_0 c}{-A_0 + r_0 c} \right)}{2}} - 1}{e^{\frac{\ln \left(\frac{A_0 + r_0 c}{-A_0 + r_0 c} \right)}{2}} + 1} \right) = \\
&= \frac{2r_0^3 c}{(-A_0^2 + r_0 c^2)} \left(1 + \frac{\frac{A_0 + r_0 c}{-A_0 + r_0 c} - 1}{\frac{A_0 + r_0 c}{-A_0 + r_0 c} + 1} \right) = \frac{2r_0^3 c}{(-A_0^2 + r_0 c^2)} \left(1 + \frac{2A_0}{2r_0 c} \right) = \frac{2r_0^3 c}{(-A_0^2 + r_0 c^2)} + \frac{2r_0^2 A_0}{(-A_0^2 + r_0 c^2)} = \\
&= \frac{2r_0^2 (r_0 c + A_0)}{(r_0 c + A_0)(r_0 c - A_0)} = \frac{2r_0^2}{(r_0 c - A_0)} = S_0.
\end{aligned}$$

Из последнего равенства находим $c = \frac{2r_0^2 + S_0 A_0}{S_0 r_0}$. Используя данные о мировой добыче и запасах нефти, получаем $b = 0.74$, $c = 0.063$,

$$r(t) = \frac{8.212}{1 + ch(0.0628t - 0.7415)}, \quad A(t) = -\frac{0.516sh(0.0628t - 0.7415)}{(1 + ch(0.0628t - 0.7415))^2}.$$

Траектория добычи нефти $r(t)$ вдоль кривой Хабберта изображена на Рис.8. При этом $A_{\min} = -0.09$ (по абсолютной величине превышает предыдущие) в момент времени $t = 2036.7$, $r_{\max} = 4.106$ при $t = 202.6$. Последние 2 значения указывают, что величина пика больше и он наблюдается позднее по сравнению с предыдущими кривыми.

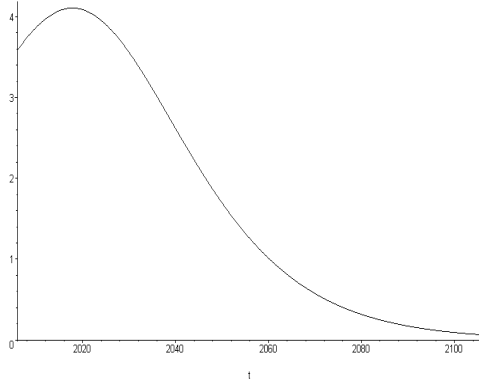


Рис.11. Добыча нефти вдоль кривой Хабберта (млрд.тонн/год).

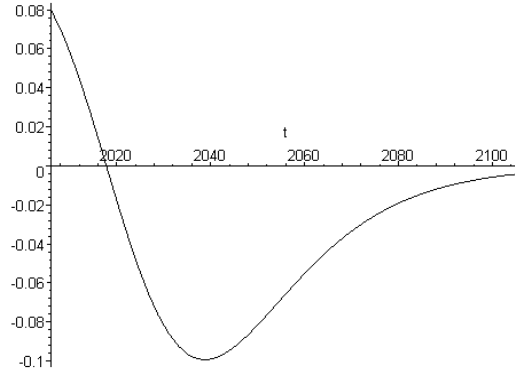


Рис.12. Изменение темпов добычи нефти вдоль кривой Хабберта (млрд.тонн/год²).

Теперь исследуем поведение потребления. Для этого сделаем некоторые выкладки, на которые будем ссылаться далее. В общем случае

$$\frac{dq}{dt} = f_k \frac{dk}{dt} + f_r \frac{dr}{dt} = \beta q \left(\frac{\alpha q}{k} + \frac{\dot{r}}{r} \right). \quad (8)$$

Кроме того,

$$\dot{f}_r = \frac{df_r}{dt} = \frac{d(\beta q/r)}{dt} = \frac{\beta d(q/r)}{dt} = \frac{\beta d(k^\alpha r^{\beta-1})}{dt} = \beta (\alpha k^{a-1} \dot{k} r^{\beta-1} + (\beta-1) r^{\beta-2} k^\alpha \dot{r}) =$$

$$= \beta \left(\frac{f_k \dot{k}}{r} + \frac{f_r \dot{r}}{r} \right) - \frac{\beta \dot{r} q}{r^2}.$$

Разделив обе части этого равенства на $f_r = \frac{\beta q}{r}$ и учитывая, что $f_k = \frac{\alpha q}{k}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{df_r}{dt} \frac{1}{f_r} &= \frac{\beta \left(\frac{\alpha q \dot{k}}{kr} + \frac{f_r \dot{r}}{r} \right) - \frac{\beta \dot{r} q}{r^2}}{f_r} = \frac{r \left(\beta \left(\frac{\alpha q \dot{k}}{kr} + \frac{f_r \dot{r}}{r} \right) - \frac{\beta \dot{r} q}{r^2} \right)}{\beta q} = \left(\frac{\alpha \dot{k}}{k} + \frac{\beta \dot{r}}{r} - \frac{\dot{r}}{r} \right) = \\ &= \frac{\alpha q}{k} \left(\frac{\dot{k}}{q} + (\beta - 1) \frac{k \dot{r}}{\alpha q r} \right) = f_k \left(\frac{\dot{k}}{q} + (\beta - 1) \frac{k \dot{r}}{\alpha q r} \right) = f_k [\cdot]. \end{aligned}$$

Для кривой Хартвика $[\cdot] = 1$, так как для неё выполняется правило Хотеллинга $\dot{f}_r / f_r = f_k$. Если $[\cdot] < 1$, значит $\dot{f}_r / f_r < f_k$, и, учитывая $\dot{k} = \beta q(t)$, получаем, что $\frac{\dot{k}}{q} + (\beta - 1) \frac{k \dot{r}}{\alpha q r} = \beta + (\beta - 1) \frac{k \dot{r}}{\alpha q r} < 1$ или $k \dot{r} / \alpha q r > -1$, что дает нам

$$-\frac{\dot{r}}{r} < \frac{\alpha q}{k}.$$

С учетом последнего неравенства из (8) получаем $\dot{q} > 0$, и, наоборот, если $[\cdot] > 1$, то $\dot{q} < 0$, то есть $\text{sgn}(\dot{q}) = \text{sgn}\{1 - [\cdot]\}$. А значит, чтобы проверить поведение функции потребления $c(t) = (1 - \beta)q(t)$ надо исследовать выражение, находящееся в квадратных скобках в (5).

Используя правило Хартвика, перепишем $\frac{\dot{k}}{q} - (1 - \beta) \frac{k \dot{r}}{\alpha q r}$ как

$$\beta - (1 - \beta) \frac{k \dot{r}}{\alpha q r}. \quad (9)$$

Так как нас интересует потребление в долгосрочном периоде (на бесконечном интервале времени), где $k, \alpha, r, (1 - \beta), q > 0$, а $\dot{r} < 0$, мы можем записать (9) в виде

$$\beta + (1 - \beta) \frac{k |\dot{r}|}{\alpha q r} \text{ или, учитывая, что } q = k^\alpha r^\beta, \text{ как } \beta + (1 - \beta) \frac{r^{-(\beta+1)} k^{(1-\alpha)} |\dot{r}|}{\alpha}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \text{sgn}\{1 - [\cdot]\} &= \text{sgn} \left\{ 1 - \left(\beta + (1 - \beta) \frac{r^{-(\beta+1)} k^{(1-\alpha)} |\dot{r}|}{\alpha} \right) \right\} = \\ &= \text{sgn} \left\{ (1 - \beta) \left(1 - \frac{r^{-(\beta+1)} k^{(1-\alpha)} |\dot{r}|}{\alpha} \right) \right\} = \text{sgn} \left\{ 1 - \frac{r^{-(\beta+1)} k^{(1-\alpha)} |\dot{r}|}{\alpha} \right\}, \text{ так как } (1 - \beta) > 0, \text{ то} \\ \text{sgn } \dot{c} &= \text{sgn} \left\{ 1 - \frac{r^{-(\beta+1)} k^{(1-\alpha)} |\dot{r}|}{\alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

То есть, чтобы исследовать поведение функции потребления на бесконечности, нужно найти к чему стремится дробь в уравнении (10) при $t \rightarrow \infty$. Причем, так как $\dot{k} = \beta q > 0$, то $k^{1-\alpha} (0 < (1-\alpha) < 1)$ при $t \rightarrow \infty$ также стремится к бесконечности.

Для кривой Хабберта $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t)^{(-1-\beta)} \left| \frac{dr(t)}{dt} \right| =$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r\theta (1 + \text{ch}(c b)) \text{sh}(c(t-b)) c \left(\frac{r\theta (1 + \text{ch}(c b))}{1 + \text{ch}(c(t-b))} \right)^{(-1-\beta)}}{(1 + \text{ch}(c(t-b)))^2} = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{sh}(c(t-b)) c \left(\frac{r\theta (1 + \text{ch}(c b))}{1 + \text{ch}(c(t-b))} \right)^{(-\beta)}}{1 + \text{ch}(c(t-b))} = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{sh}(c(t-b)) c}{1 + \text{ch}(c(t-b))} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{r\theta (1 + \text{ch}(c b))}{1 + \text{ch}(c(t-b))} \right)^{(-\beta)}.
\end{aligned}$$

К первому из пределов применим правило Лопиталя. Получим,
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{sh}(c(t-b)) c}{1 + \text{ch}(c(t-b))} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c \text{ch}(c(t-b))}{\text{sh}(c(t-b))} = \lim_{t \rightarrow \infty} (cth(c(t-b))c) = c.$

Так как $0 < \beta < 1/2$, то второй предел будет равен ∞ . Следовательно,
 $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t)^{(-1-\beta)} \left| \frac{dr(t)}{dt} \right| = c \cdot \infty = \infty$ (так как $c > 0$). То есть, в данном случае (10) примет вид $\text{sgn}\{1 - \infty \cdot \infty / \alpha\} = -1$. А это означает, что потребление $c(t)$, также как и производство $q(t)$ постепенно будут снижаться, асимптотически приближаясь к нулю.

Для построения численной оценки функции $c(t) = (1-\beta)k^\alpha r^\beta$, нужно найти $k(t)$, решив дифференциальное уравнение

$$\frac{dk(t)}{dt} = \beta k^\alpha(t) r^\beta(t) \quad (11)$$

или

$$\frac{dk(t)}{k^\alpha(t)} = \beta \cdot r^\beta(t) dt$$

Что дает нам

$$\frac{k^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \beta \int r^\beta(t) dt + \text{const.}$$

Решение в общем виде можно записать как

$$k^{1-\alpha} = \beta(1-\alpha)I(t) + k_0^{1-\alpha} \quad (12)$$

где

$$I(t) = \int r(t)^\beta dt, \quad (13)$$

$$k_0 = \left\{ \left[\left(\dot{q}/q \right)_0 \frac{1}{\beta} - \frac{A_0}{r_0} \right] / \left[\alpha r_0^\beta \right] \right\}^{1/(\alpha-1)},$$

$(\dot{q}/q)_0$ - процентное изменение ВВП в начальный момент времени. Для кривой Хартвика $(\dot{q}/q)_0 = 0$. Для остальных рассматриваемых кривых $(\dot{q}/q)_0 = 0.04$ [3]. К сожалению, для функции Хабберта интеграл в (13) не выражается в элементарных функциях, поэтому для построения $c(t)$ использовались численные процедуры программы Maple.

График на Рис.13 для траектории Хабберта показывает вначале возрастающее потребление, достигающее своего наибольшего значения $c_{\max} = 1.211$, а затем асимптотически стремящееся к нулю.

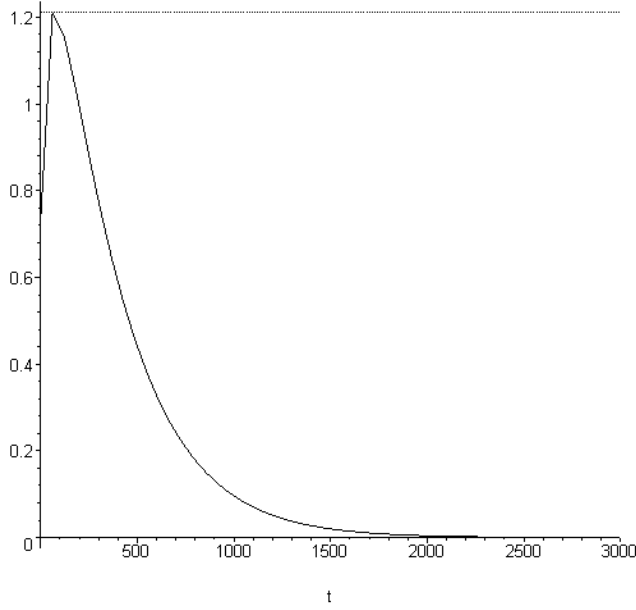


Рис.13. Убывающее в долгосрочном периоде потребление вдоль кривой Хабберта.

Для сравнения эффективности (в смысле уровня потребления) вдоль устойчивых траекторий истощения, описываемых разными функциональными выражениями, исследуем поведение потребления вдоль кривых, задаваемых функциями плотности непрерывных распределений.

3.2. Траектория 1

3.2.1. Характеристики кривой истощения

Данная траектория описывается функцией плотности нормального распределения

$$\varphi(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\xi)^2}{2\sigma^2}}, X \in R, \xi \in R, \sigma > 0,$$

где ξ – математическое ожидание, σ^2 – дисперсия, X – случайная величина.

Траектория описывается функцией вида $r(t) = r_0 e^{\left(\frac{b^2 - (b-t)^2}{c}\right)}$, $c \in (0, \infty)$, $b \in R$.

$$A(t) = \frac{dr(t)}{dt} = \left(r_0 e^{\left(\frac{b^2 - (b-t)^2}{c}\right)} \frac{2(b-t)}{c} \right), c \in (0, \infty), b \in R.$$

Из условий (1)-(2) находим параметры b , c .

Условие (1): $A(0) = A_0 = r_0 \frac{2b}{c}$, откуда $b = \frac{cA_0}{2r_0}$. Подставив b в $r(t)$, получим

$$r(t) = r_0 \exp \left(\frac{A_0^2 c^2}{4r_0^2} - \left(\frac{A_0 c}{2r_0} - t \right)^2 / c \right).$$

Условие (2):
$$\int_0^{\infty} r(t) dt = \int_0^{\infty} r_0 \exp \left(\frac{A_0^2 c^2}{4r_0^2} - \left(\frac{A_0 c}{2r_0} - t \right)^2 / c \right) dt = S_0. \quad (14)$$

Численное решение уравнения (14) дает $c=1167$.

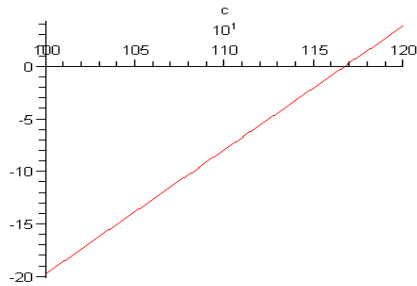


Рис. 14. График уравнения для нахождения корня в (14).

Траектория добычи нефти вдоль кривой 1 $r(t) = 3.58969e^{\left(0.1449 - \frac{(13.004-t)^2}{1167}\right)}$ изображена на Рис.15, изменение темпов добычи $A(t) = 0.00615(13.004 - t)e^{\left(\frac{t(26.008-t)}{1167}\right)}$ на Рис. 16.

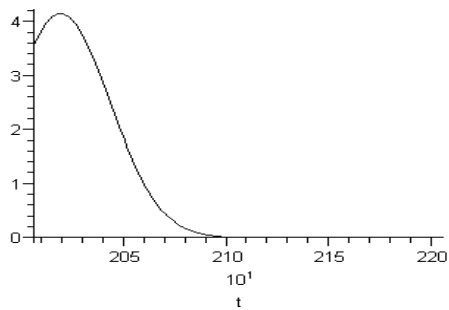


Рис. 15. Темпы добычи нефти вдоль Траектории 1 (млрд. тонн/год).

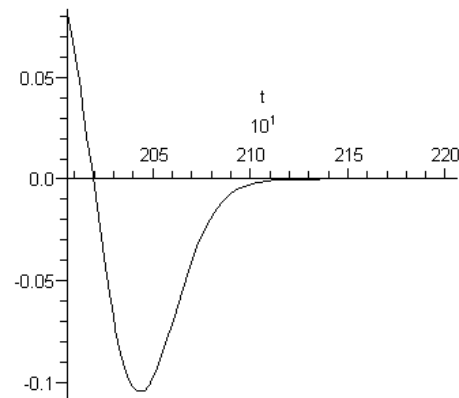


Рис. 16. Изменение темпов добычи вдоль Траектории 1 (млрд. тонн/год²).

Показатели минимального ускорения и пика добычи очень близки к значениям для кривой Хабберта, хотя наблюдаются позже $A_{\min} = -0.11$ при $t = 2045$, $r_{\max} = 4.17$ в момент $t = 2020$.

3.2.2. Поведение потребления

Рассмотрим предел

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t)^{-(1+\beta)} |\dot{r}|) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(r_0 e^{\left(\frac{b^2 - (b-t)^2}{c} \right)} \right)^{-(\beta+1)} \left| r_0 e^{\left(\frac{b^2 - (b-t)^2}{c} \right)} \frac{2(b-t)}{c} \right| \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(r_0^{-\beta} e^{-\beta \left(\frac{b^2 - (b-t)^2}{c} \right)} \right) \left| \frac{2(b-t)}{c} \right| \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(r_0^{-\beta} e^{\left(\frac{-\beta b^2 + \beta(b-t)^2}{c} \right)} \right) \cdot \left| \frac{2(b-t)}{c} \right| \right) = \infty \cdot \infty = \infty, \end{aligned}$$

так как $0 < \beta < 1$. Тогда правая часть уравнения (10) примет вид $\text{sgn}\{1 - \infty \cdot \infty / \alpha\} = -1$. А это означает, что потребление $c(t)$ на бесконечности убывает, асимптотически приближаясь к нулю (Рис. 17). Значение пика потребления равно 1.43.

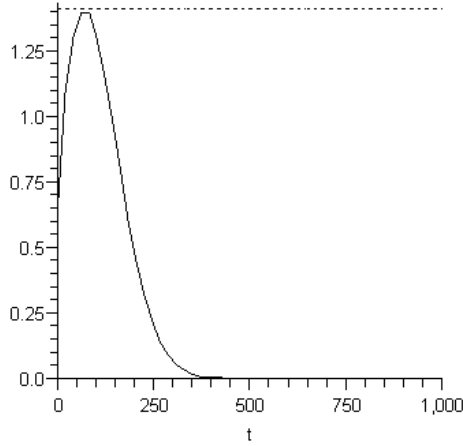


Рис. 17. Убывающее на бесконечности потребление вдоль Траектории 1.

3.3. Траектория 2

3.3.1. Характеристики кривой исчерпания

Траектория 2 построена из функции плотности Гамма-распределения при $a = 3$:

$$f(X) = \frac{X^{a-1} e^{-\frac{X}{b}}}{b^a \Gamma(a)}, X \in [0, \infty),$$

где a, b – параметры распределения ($a > 0, b > 0$),

X – случайная величина,

$\Gamma(a)$ – Гамма-функция.

Кривая темпов добычи имеет вид:

$$r(t) = \frac{r_0 (t-b)^2 e^{\left(\frac{-t}{c}\right)}}{b^2}, b \in (R(-\infty, 0) \cup R(0, \infty)), c \in R(0, \infty).$$

Кривая ускорения:

$$\frac{dr(t)}{dt} = A(t) = -\frac{r_0 (t-b) e^{\left(\frac{-t}{c}\right)} (-2c + t - b)}{cb^2}, b \in (R(-\infty, 0) \cup R(0, \infty)), c \in R(0, \infty).$$

Из (1) находим c : $A(0) = A_0 = -\frac{r_0 (-b) (-2c - b)}{cb^2} = \frac{r_0 (-2c - b)}{cb}$, или $A_0 = -\frac{2r_0}{b} - \frac{r_0}{c}$, что

дает нам $c = -\frac{r_0 b}{2r_0 + A_0 b}$.

Подставив c в $r(t)$, получим $r(t) = \frac{r_0(t-b)^2 e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)}}{b^2}$.

Параметр b определяется условием (2).

$$\int_0^\infty r(t)dt = \int_0^\infty \frac{r_0(t-b)^2 e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)}}{b^2} dt = \frac{r_0}{b^2} \int_0^\infty (t-b)^2 e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)} dt.$$

Интегрируем по частям, обозначив $u = (t-b)^2$, $du = 2(t-b)dt$; $dv = e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)} dt$,

$v = \frac{r_0b}{(2r_0 + A_0b)} e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)}$. Тогда

$$\int_0^\infty r(t)dt = \frac{r_0}{b^2} \left(\left((t-b)^2 \frac{r_0b}{(2r_0 + A_0b)} e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)} \right) \Big|_0^\infty - \frac{2r_0b}{(2r_0 + A_0b)} \int_0^\infty (t-b) e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)} dt \right) =$$

$\int_0^\infty (t-b) e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)} dt$, что опять интегрируем по частям, обозначив $u = (t-b)$, $du = dt$;

$dv = e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)} dt$, $v = \frac{r_0b}{(2r_0 + A_0b)} e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)}$. Тогда $\int_0^\infty r(t)dt =$

$$= \frac{r_0}{b^2} \left(\left((t-b)^2 \frac{r_0b}{(2r_0 + A_0b)} e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)} \right) \Big|_0^\infty - \frac{2r_0^2b^2}{(2r_0 + A_0b)^2} \left(\left((t-b) e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)} \right) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)} dt \right) \right) =$$

$$= \frac{r_0^2}{b(2r_0 + A_0b)} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left((t-b)^2 e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)} \right) - b^2 \right) -$$

$$- \frac{2r_0^3}{(2r_0 + A_0b)^2} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left((t-b) e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)} \right) + b \right) + \frac{2r_0^4b}{(2r_0 + A_0b)^3} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)} \right) - 1 \right).$$

Так как по построению $c > 0$, то $\frac{2r_0 + A_0b}{r_0b} < 0$, значит, $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)} \right) = 0$.

Следовательно, применив два раза правило Лопиталя к $\lim_{t \rightarrow \infty} \left((t-b)^2 e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)} \right)$ и один раз к

$\lim_{t \rightarrow \infty} \left((t-b) e^{\left(\frac{(2r_0+A_0b)t}{r_0b}\right)} \right)$, так как имеем неопределенность $\infty \cdot 0 = \frac{\infty}{\infty}$, получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left((t-b)^2 \exp \left(\frac{(2r_0 + A_0 b)t}{r_0 b} \right) \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left((t-b)^2 / \exp \left(-\frac{(2r_0 + A_0 b)t}{r_0 b} \right) \right) =$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2(t-b)}{-\left(\frac{(2r_0 + A_0 b)}{r_0 b} \right) e^{-\left(\frac{(2r_0 + A_0 b)t}{r_0 b} \right)}} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\left(\frac{(2r_0 + A_0 b)}{r_0 b} \right)^2 e^{-\left(\frac{(2r_0 + A_0 b)t}{r_0 b} \right)}} \right) = 0;$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left((t-b) e^{\left(\frac{(2r_0 + A_0 b)t}{r_0 b} \right)} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{(t-b)}{e^{-\left(\frac{(2r_0 + A_0 b)t}{r_0 b} \right)}} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{-\left(\frac{(2r_0 + A_0 b)}{r_0 b} \right) e^{-\left(\frac{(2r_0 + A_0 b)t}{r_0 b} \right)}} \right) = -0.$$

И тогда $\int_0^{\infty} \frac{r_0 (t-b)^2 e^{\left(\frac{(2r_0 + A_0 b)t}{r_0 b} \right)}}{b^2} dt$ перепишется в виде:

$$\int_0^{\infty} \frac{r_0 (t-b)^2 e^{\left(\frac{(2r_0 + A_0 b)t}{r_0 b} \right)}}{b^2} dt = \frac{r_0^2}{b(2r_0 + A_0 b)} (-b^2) - \frac{2r_0^3}{(2r_0 + A_0 b)^2} (b) - \frac{2r_0^4 b}{(2r_0 + A_0 b)^3} =$$

$$= \frac{-r_0^2 b}{(2r_0 + A_0 b)^3} ((2r_0 + A_0 b)^2 + 2r_0(2r_0 + A_0 b) + 2r_0^2) = S_0.$$

То есть

$$\frac{-r_0^2 b}{(2r_0 + A_0 b)^3} ((2r_0 + A_0 b)^2 + 2r_0(2r_0 + A_0 b) + 2r_0^2) - S_0 = 0.$$

Подставив данные о мировой добыче и запасах нефти в последнее равенство находим $b = -22.75$ (Рис. 18), что дает $c = 15.237$.

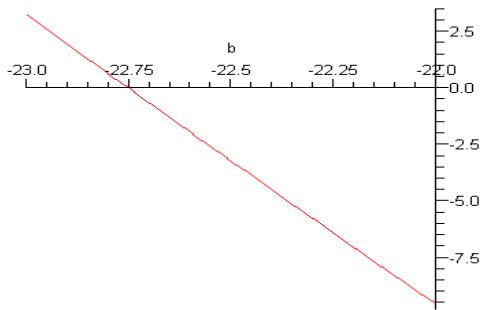


Рис. 18. График уравнения для нахождения b .

Траектория истощения нефти $r(t) = 0.0069(t + 22.75)^2 e^{-0.065t}$ изображена на Рис.19. Ускорение $A(t) = e^{-0.065t} (0.0138(t + 22.75) - 0.004(t + 22.75)^2)$ на Рис.20. $A_{\min} = -0.074$ при $t = 2035.7$, $r_{\max} = 3.879$ в момент $t = 2013.7$. То есть пик наступает раньше, значение пика меньше, чем для траектории 1 и кривой Хабберта, следовательно, на будущее остается больше ресурса и максимальное снижение темпов добычи меньше, что закономерно.

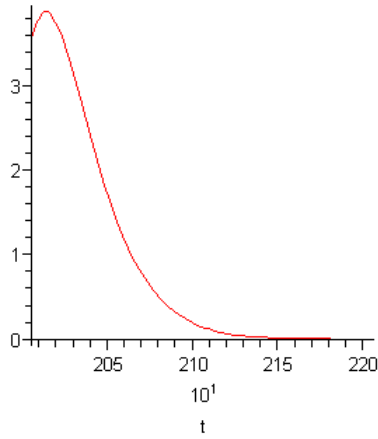


Рис. 19. Темпы добычи нефти вдоль Траектории 2 (млрд. тонн/год).

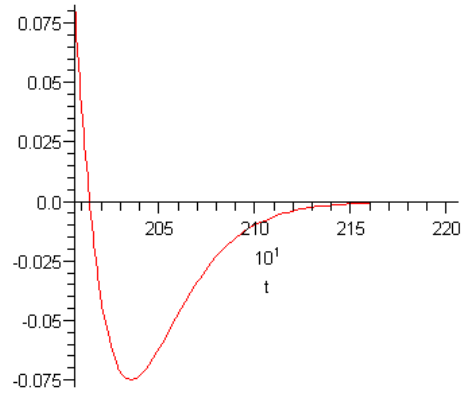


Рис. 20. Изменение темпов добычи нефти вдоль Траектории 2 (млрд. тонн/год²).

3.3.2. Исследование потребления

Рассмотрим предел

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} \left(r(t)^{-(\beta+1)} \left| \frac{dr(t)}{dt} \right| \right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left| r_0(t-b)e^{\left(\frac{-t}{c}\right)}(-2c+t-b) \right| \cdot \left(\frac{r_0(t-b)^2 e^{\left(\frac{-t}{c}\right)}}{b^2} \right)^{-(1+\beta)} / (cb^2) \right) = \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{(-2c+t-b)}{(t-b)c} \cdot \left(\frac{r_0(t-b)^2 e^{\left(\frac{-t}{c}\right)}}{b^2} \right)^{(-\beta)} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{-2}{(t-b)} + \frac{1}{c} \right) \cdot \left(\frac{r_0^{-\beta} e^{\left(\frac{\beta t}{c}\right)}}{b^{-2\beta}(t-b)^{2\beta}} \right) \right) = \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{r_0^{-\beta} b^{2\beta}}{c} \cdot \frac{e^{\left(\frac{\beta t}{c}\right)}}{(t-b)^{2\beta}} \right).
 \end{aligned}$$

Так как $c > 0$, $0 < \beta < 1$, имеем неопределенность вида ∞/∞ . Несколько раз применив правило Лопиталя, получим, что данный предел равен бесконечности, что согласно (10) означает, что потребление на бесконечности убывает (Рис. 21).

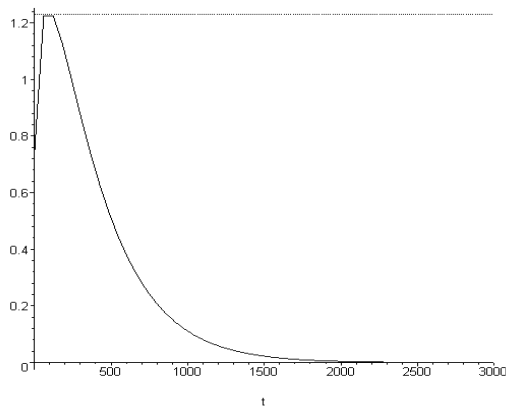


Рис. 21. Убывающее в долгосрочном периоде потребление вдоль кривой 2.

3.4. Траектория 3

3.4.1. Характеристики кривой

В качестве ещё одной возможной траектории исчерпания ресурса рассмотрим кривую, полученную из плотности распределения Коши:

$$r(t) = \frac{r_0(c+b^2)}{c+(t-b)^2}, c \in R(0, \infty), b \in R,$$

$$f(X) = \frac{\sigma}{\pi \cdot (\sigma^2 + (X - \xi)^2)}, X \in R, \xi \in R, \sigma > 0,$$

где ξ, σ^2 – параметры кривой,

X – случайная величина.

$$\text{Изменение темпов добычи определяется как } \frac{dr(t)}{dt} = A(t) = -\frac{2r_0(c+b^2)(t-b)}{(c+(t-b)^2)^2}.$$

Из (1)-(2) ищем b, c .

$$\text{Условие (1): } A(0) = A_0 = \frac{2r_0b(c+b^2)}{(c+(-b)^2)^2} = \frac{2r_0b}{(c+b^2)}, \text{ откуда находим } c = \frac{2r_0b - A_0b^2}{A_0}.$$

$$r(t) = \frac{r_0(2r_0b - A_0b^2 + A_0b^2)}{A_0\left(\frac{2r_0b - A_0b^2}{A_0} + (t-b)^2\right)} = \frac{2r_0^2b}{A_0\left(\frac{2r_0b - A_0b^2}{A_0} + (t-b)^2\right)}.$$

$$\text{Условие (2): } \int_0^\infty r(t)dt = \int_0^\infty \frac{2r_0^2b}{A_0\left(\frac{2r_0b - A_0b^2}{A_0} + (t-b)^2\right)}dt = \frac{2r_0^2b}{A_0} \int_0^\infty \frac{dt}{\left(\frac{2r_0b - A_0b^2}{A_0} + (t-b)^2\right)} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2r_0^2b}{(2r_0b - A_0b^2)} \int_0^\infty \frac{dt}{\left(1 + \frac{A_0(t-b)^2}{(2r_0b - A_0b^2)}\right)} = \frac{2r_0^2b}{\sqrt{A_0(2r_0b - A_0b^2)}} \int_0^\infty \frac{d\left(\frac{\sqrt{A_0}(t-b)}{\sqrt{2r_0b - A_0b^2}}\right)}{\left(1 + \frac{A_0(t-b)^2}{(2r_0b - A_0b^2)}\right)} = \\ &= \left(\frac{2r_0^2b}{\sqrt{A_0(2r_0b - A_0b^2)}} \arctg\left(\frac{\sqrt{A_0}(t-b)}{\sqrt{2r_0b - A_0b^2}}\right)\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{2r_0^2b}{\sqrt{A_0(2r_0b - A_0b^2)}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{-\sqrt{A_0}b}{\sqrt{2r_0b - A_0b^2}}\right)\right), \end{aligned}$$

то есть b выражается из уравнения

$$\frac{2r_0^2b}{\sqrt{A_0(2r_0b - A_0b^2)}} \left(\frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{\sqrt{A_0}b}{\sqrt{2r_0b - A_0b^2}}\right)\right) = S_0,$$

которое после подстановки начальных данных принимает вид

$$\frac{25.77 \left(1.57 + \arctg \left(\frac{0.283}{\sqrt{7.18b - 0.08b^2}} \right) \right)}{\sqrt{0.57b - 0.0064b^2}} - 177.06 = 0. \quad (15)$$

Левая часть этого уравнения изображена графически на Рис.22.

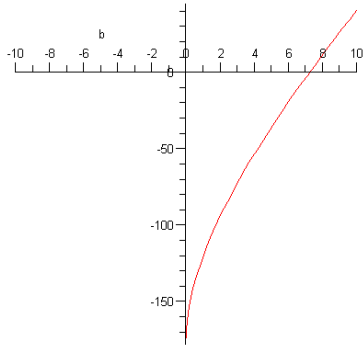


Рис. 22. Решение уравнения (15).

Получаем $b = 7.2$, тогда $c = 595.7$. А следовательно, $r(t) = \frac{2325.45}{595.7 + (t - 7.2)^2}$ (Рис.23),

$A(t) = -\frac{2325.44(2t - 14.43)}{(595.7 + (t - 7.2)^2)^2}$ (Рис.24). При этом $A_{\min} = -0.103$ при $t = 2027.3$, $r_{\max} = 3.9$ в момент времени $t = 2013.2$.

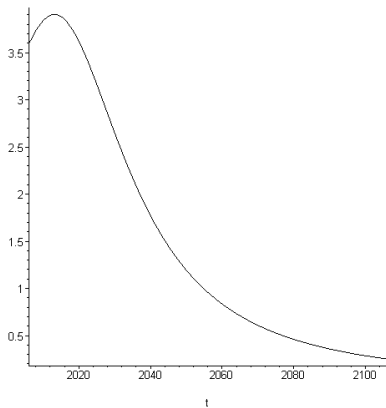


Рис. 23. Добыча нефти вдоль Траектории 3 (млрд. тонн/год).

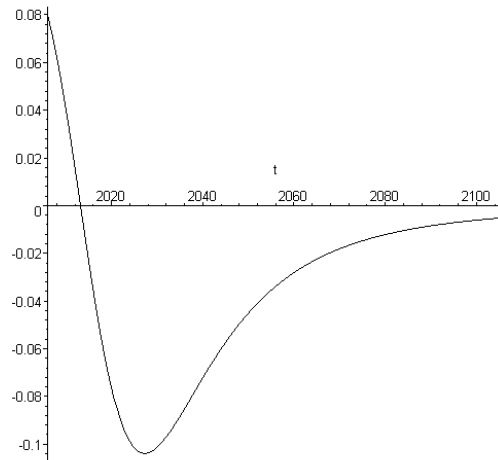


Рис. 24. Изменение темпов добычи для Траектории 3 (млрд. тонн/год²).

3.4.2. Исследование потребления

$$\begin{aligned} \text{Оценим предел } \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)^{-(1+\beta)} \left| \frac{dr(t)}{dt} \right| &= \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|2r_0(c+b^2)(t-b)| \cdot \left(\frac{r_0(c+b^2)}{c+(t-b)^2} \right)^{-(1+\beta)}}{(c+(t-b)^2)^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2|t-b| \cdot \left(\frac{r_0(c+b^2)}{c+(t-b)^2} \right)^{-\beta}}{c+(t-b)^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2(r_0(c+b^2))^{-\beta}}{(c+(t-b)^2)^{1-\beta} |t-b|^{-1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2(r_0(c+b^2))^{-\beta}}{\left(\frac{(c+(t-b)^2)}{(t-b)^2} \right)^{1-\beta} |t-b|^{(1-2\beta)}} = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2(r_0(c+b^2))^{-\beta}}{\left(\frac{c}{(t-b)^2} + 1 \right)^{1-\beta} |t-b|^{(1-2\beta)}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2(r_0(c+b^2))^{-\beta}}{|t-b|^{(1-2\beta)}}.
\end{aligned}$$

Так как $0 < \alpha + \beta < 1$ и $\alpha > \beta > 0$, то $0 < \beta < \frac{1}{2}$ ($(1-2\beta) > 0$), а значит, данный предел равен нулю. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{r^{-(\beta+1)} k^{(1-\alpha)} \left| \frac{dr}{dt} \right|}{\alpha} \right) = \infty \cdot 0 = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{k^{(1-\alpha)}}{\alpha |t-b|^{(1-2\beta)}} \right) = \frac{2(r_0(c+b^2))^{-\beta}}{\alpha} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{k^{1-\alpha}(t)}{|t-b|^{(1-2\beta)}} \right).$$

Используя правило Лопиталья, получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{k^{1-\alpha}(t)}{|t-b|^{(1-2\beta)}} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{d(k^{1-\alpha}(t))}{dt}}{(1-2\beta) \cdot |t-b|^{-2\beta}} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{(1-\alpha)k^{-\alpha}(t) \frac{dk}{dt}}{(1-2\beta) \cdot |t-b|^{-2\beta}} \right),$$

так как $\dot{k} = \beta k^\alpha r^\beta$, то получаем

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{r^{-(\beta+1)} k^{(1-\alpha)} \left| \frac{dr}{dt} \right|}{\alpha} \right) = \frac{2(r_0(c+b^2))^{-\beta}}{\alpha} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{(1-\alpha)k^{-\alpha} \beta k^\alpha r^\beta}{(1-2\beta) \cdot |t-b|^{-2\beta}} \right) = \\
&= \frac{2(r_0(c+b^2))^{-\beta} (1-\alpha) \beta}{\alpha (1-2\beta)} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{r^\beta(t)}{|t-b|^{-2\beta}} \right) = \frac{2(r_0(c+b^2))^{-\beta} (1-\alpha) \beta}{\alpha (1-2\beta)} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(\frac{r_0(c+b^2)}{c+(t-b)^2} \right)^\beta}{|t-b|^{-2\beta}} \right) = \\
&\frac{2(1-\alpha) \beta}{\alpha (1-2\beta)} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(\frac{1}{c+(t-b)^2} \right)^\beta}{|t-b|^{-2\beta}} \right) = \frac{2(1-\alpha) \beta}{\alpha (1-2\beta)} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{(c+(t-b)^2)^{-\beta}}{((t-b)^2)^{-\beta}} \right) = \frac{2(1-\alpha) \beta}{\alpha (1-2\beta)} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{c}{(t-b)^2} + 1 \right)^{-\beta} = \\
&= \frac{2(1-\alpha) \beta}{\alpha (1-2\beta)}.
\end{aligned}$$

В результате, согласно (10), получим:

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{dc(t)}{dt}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{dq(t)}{dt}\right) = \operatorname{sgn}\left\{1 - \frac{2(1-\alpha)\beta}{\alpha(1-2\beta)}\right\}, \text{ что}$$

а) «>0», то есть потребление возрастает, если $\frac{\alpha}{\beta} > 2$;

б) «=0», то есть потребление асимптотически постоянно, если $\frac{\alpha}{\beta} = 2$;

с) «<0», следовательно, потребление убывает, если $\frac{\alpha}{\beta} < 2$.

То есть, в отличие от Траекторий 1-2, вдоль которых всегда имеем убывающее на бесконечности потребление, для Траектории 3 можно получить и возрастающее потребление, которое как раз и достигается для рассматриваемых $\alpha=0.3$, $\beta=0.05$. (Рис.25). Это объясняется тем, что плотность распределения Коши имеет «тяжелые» хвосты, при $t \rightarrow \infty$, медленнее стремится к нулю, чем рассматриваемые выше плотности распределений и, следовательно, для будущих поколений остается большее количество ресурса.

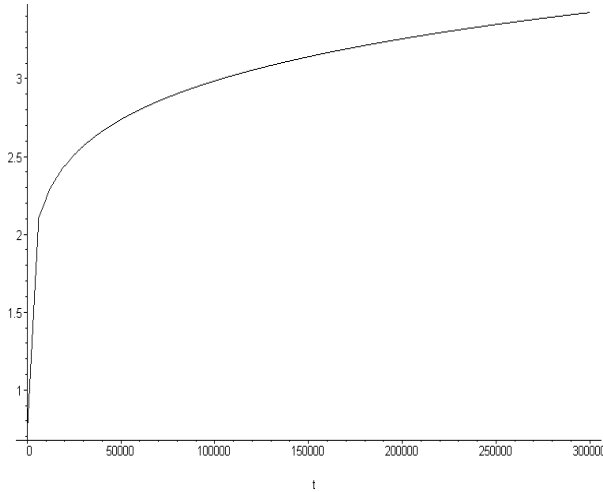


Рис. 25. Возрастающее потребление вдоль Траектории 3.

4. Исследование потребления для траекторий с тремя параметрами

Подобно рациональной переходной кривой, которая определяется тремя параметрами, удовлетворяющими условиям 1-3, внесем изменение в каждую из вышеуказанных Траекторий(1-3) и кривую Хабберта, введя параметр d . Исследуем, как изменится поведение потребления в зависимости от d .

4.1. Кривая Хабберта.

$$r(t) = \frac{r_0(1 + ch(-cb))^d}{(1 + ch(c(t-b)))^d}, d \in R(0, \infty), c \in R(0, \infty).$$

$$A(t) = \frac{dr(t)}{dt} = -\frac{dr_0(1 + ch(-cb))^d sh(c(t-b))c}{(1 + ch(c(t-b)))^{d+1}}, c \in R(0, \infty), d \in R(0, \infty).$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{dr}{dt} \cdot r(t)^{-\beta-1} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|dr_0(1 + ch(cb))^d sh(c(t-b))c| \cdot (r_0(1 + ch(cb))^d)^{-\beta-1}}{(1 + ch(c(t-b)))^{d+1} ((1 + ch(c(t-b)))^d)^{-\beta-1}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d |sh(c(t-b))| c (r_0 (1 + ch(cb))^d)^{-\beta}}{(1 + ch(c(t-b))) ((1 + ch(c(t-b)))^d)^{-\beta}}.$$

К выражению $\frac{|sh(c(t-b))|}{1 + ch(c(t-b))}$ применим правило Лопиталя. Получим,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|sh(c(t-b))|}{1 + ch(c(t-b))} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{c \cdot ch(c(t-b))}{c \cdot sh(c(t-b))} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} (cth(c(t-b))) = 1.$$

Следовательно, искомый предел равен :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dc(r_0 (1 + ch(cb))^d)^{-\beta}}{((1 + ch(c(t-b)))^d)^{-\beta}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dc(1 + ch(c(t-b)))^{d\beta}}{r_0^\beta ((1 + ch(cb)))^{d\beta}} = \infty, \text{ так как } d \cdot \beta > 0.$$

Таким образом, потребление убывает в долгосрочном периоде, независимо от d .

4.2. Траектория 1

Уравнения траектории и ускорения имеют вид

$$r(t) = r_0 \exp\left(\ln(d) + \frac{b^2 - (b-t)^2}{c}\right) / d, c \in (0, \infty), d \in (0, \infty).$$

$$A(t) = \frac{dr(t)}{dt} = \frac{r_0 e^{\left(\ln(d) + \frac{b^2 - (b-t)^2}{c}\right)}}{d} \frac{2(b-t)}{c}, c \in R(0, \infty), d \in (0, \infty).$$

Тогда, чтобы оценить потребление, рассмотрим предел

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t)^{-(1+\beta)} |r'|) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{r_0 e^{\left(\ln(d) + \frac{b^2 - (b-t)^2}{c}\right)}}{d} \right)^{-(\beta+1)} \left| r_0 e^{\left(\ln(d) + \frac{b^2 - (b-t)^2}{c}\right)} \frac{2(b-t)}{dc} \right| \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(\left(\frac{r_0}{d} \right)^{-\beta} e^{-\beta \left(\ln(d) + \frac{b^2 - (b-t)^2}{c}\right)} \right) \left| \frac{2(b-t)}{c} \right| \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(\left(\frac{r_0}{d} \right)^{-\beta} e^{-\beta \left(\ln(d) + \frac{-\beta b^2 + \beta(b-t)^2}{c}\right)} \right) \cdot \left| \frac{2(b-t)}{c} \right| \right) = \end{aligned}$$

$= \infty \cdot \infty = \infty$, так как $0 < \beta < 1$. Тогда (10) примет вид $\text{sgn}\{1 - \infty \cdot \infty / \alpha\} = -1$. А это означает, что потребление $c(t)$ убывает, асимптотически приближаясь к нулю, независимо от d .

4.3. Траектория 2

$$\text{Для функции } r(t) = \frac{r_0 |t-b|^d e^{-t/c}}{|b|^d}, c \in R(0, \infty), d \in R(0, \infty)$$

$$A(t) = \frac{dr(t)}{dt} = \frac{r_0}{|b|^d} |t-b|^d e^{-t/c} \left(\frac{d}{|t-b|} - \frac{1}{c} \right), c \in R(0, \infty), d \in R(0, \infty).$$

Так как рассматриваем на бесконечности и $t > 0$, $b < \infty$, опустим модуль в $|t-b|^d$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(r(t)^{-(1+\beta)} \left| \dot{r} \right| \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left| r_0 (t-b)^d e^{-t/c} \left(\frac{d}{(t-b)} - \frac{1}{c} \right) \cdot \left(\frac{r_0 (t-b)^d e^{-t/c}}{|b|^d} \right)^{-\beta-1} \right| / |b|^d =$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{c} e^{\frac{t\beta}{c}} (t-b)^{-d\beta} r_0^{-\beta}}{|b|^{-d\beta}} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{c} \right) \cdot |b|^{d\beta} \left(\frac{1}{r_0} \right)^\beta \cdot \left(\frac{e^{\frac{t\beta}{c}}}{(t-b)^{d\beta}} \right) \right).$$

Применив конечное число раз правило Лопиталя (так как $c > 0$, $d > 0$, $\beta > 0$ и имеем неопределенность вида ∞ / ∞), получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{c} \right) \cdot |b|^{d\beta} \left(\frac{1}{r_0} \right)^\beta \cdot \left(\frac{e^{\frac{t\beta}{c}}}{(t-b)^{d\beta}} \right) \right) = \infty.$$

Отсюда следует, что потребление на бесконечности всегда убывает.

4.3. Траектория 3

Имеется траектория, основанная на функции плотности распределения Коши:

$$r(t) = \frac{r_0 (c + b^2)^d}{[c + (t-b)^2]^d}, c \in R(0, \infty), d \in R(0, \infty);$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = A(t) = -\frac{2dr_0 (c + b^2)^d (t-b)}{(c + (t-b)^2)^{d+1}}, c \in R(0, \infty), d \in R(0, \infty).$$

Для данной траектории

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r^{-(\beta+1)} \cdot \left| \frac{dr(t)}{dt} \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|2r_0 (c + b^2)^d d (t-b) (c + (t-b)^2)^{-d-1}| (r_0 (c + b^2)^d)^{-\beta-1}}{\left((c + (t-b)^2)^d \right)^{1-\beta}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|2d(t-b)|}{(r_0 (c + b^2)^d)^\beta (c + (t-b)^2)^{-d} (c + (t-b)^2)^{-\beta} (c + (t-b)^2)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2d(r_0 (c + b^2)^d)^{-\beta}}{|(t-b)|^{-1} (c + (t-b)^2)^{-d\beta+1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2d(r_0 (c + b^2)^d)^{-\beta}}{\left(\frac{c}{(t-b)^2} + 1 \right)^{-d\beta+1} |(t-b)|^{-2d\beta+1}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2d(r_0 (c + b^2)^d)^{-\beta}}{|(t-b)|^{-2d\beta+1}}.$$

Если $-2d\beta + 1 < 0$, то предел будет равен бесконечности и из (10) получаем убывающее потребление. В другом случае рассмотрим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k(t)^{1-\alpha} r(t)^{-1-\beta}}{\alpha} \cdot \left| \frac{dr(t)}{dt} \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{k(t)^{1-\alpha} 2d(r_0 (c + b^2)^d)^{-\beta}}{\alpha |(t-b)|^{-2d\beta+1}} \right) = \frac{\infty}{\infty}.$$

То есть имеем неопределенность вида ∞ / ∞ . Воспользуемся правилом Лопиталя.

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k(t)^{1-\alpha} r(t)^{-1-\beta}}{\alpha} \cdot \left| \frac{dr(t)}{dt} \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{(1-\alpha)k^{-\alpha} \frac{dk}{dt} 2d(r_0(c+b^2)^d)^{-\beta}}{\alpha(-2d\beta+1)|(t-b)|^{-2d\beta}} \right) = \\
& = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{(1-\alpha)k^{-\alpha} \beta k^{\alpha} r^{\beta} 2d(r_0(c+b^2)^d)^{-\beta}}{\alpha(1-2d\beta)|(t-b)|^{-2d\beta}} \right) = \\
& = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{(1-\alpha)\beta(r_0(c+b^2)^d)^{\beta} 2d(r_0(c+b^2)^d)^{-\beta}}{\alpha(1-2d\beta)(c+(t-b)^2)^{\beta} |(t-b)|^{-2d\beta}} \right) = \\
& = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2(1-\alpha)d\beta}{\alpha(1-2d\beta) \cdot \left(\frac{c+(t-b)^2}{(t-b)^2} \right)^{d\beta}} \right) = \\
& = \left(\frac{(1-\alpha)2d\beta}{\alpha(1-2d\beta)} \right).
\end{aligned}$$

Тогда, согласно (10), потребление

(а) постоянно, если $d = \frac{\alpha}{2\beta}$;

(б) возрастает, если $d < \frac{\alpha}{2\beta}$;

(с) убывает, если $d > \frac{\alpha}{2\beta}$.

В результате получили, что введение параметра d повлияло только на потребление траектории 3. Для всех остальных кривых оно, независимо от d, b, c , а, следовательно, и от начальных значений запасов и добычи нефти, на бесконечности убывает, то есть не устойчиво.

Рассмотрим постоянное потребление вдоль Траектории 3. При этом $d = \alpha/2\beta$, или, для имеющихся данных, $d = 0.3/2 \cdot 0.05 = 3$.

$$r(t) = \frac{r_0(c+b^2)^3}{[c+(t-b)^2]^3}, c \in R(0, \infty), b \in R;$$

$$A(t) = -\frac{6r_0(c+b^2)^3(t-b)}{(c+(t-b)^2)^4}, c \in R(0, \infty), b \in R.$$

$$A(0) = A_0 = \frac{6r_0b(c+b^2)^3}{(c+b^2)^4} = \frac{6r_0b}{c+b^2},$$

откуда $c = \frac{6br_0 - A_0b^2}{A_0}$. Тогда

$$r(t) = r_0(6br_0)^3 / A_0^3 \left[\frac{6br_0 - A_0 b^2}{A_0} + (t-b)^2 \right]^3.$$

$$\int_0^\infty r(t)dt = \int_0^\infty \frac{r_0(6br_0)^3}{A_0^3 \left[\frac{6br_0 - A_0 b^2}{A_0} + (t-b)^2 \right]^3} dt - S_0 = 0. \quad (16)$$

Численное решение уравнения (16), $b=11.57$, при $A_0=0.08$, $r_0=3.6243$, $S_0 = 180.47$ изображено на Рис.26.

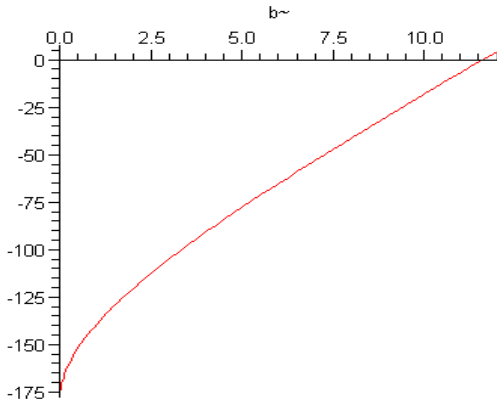


Рис. 26. Решение уравнения (16).

Тогда $c = 2981.19$, $r(t) = \frac{1.09 \cdot 10^{11}}{(2981.19 + (t - 11.57)^2)^3}.$

Сравнивая полученную траекторию с рациональной переходной кривой, вдоль которой потребление также постоянно при $d=8$ [5] (Рис.27), видим, что пик добычи для Траектории 3 заметно больше, что предлагает меньше ресурса для будущих поколений.

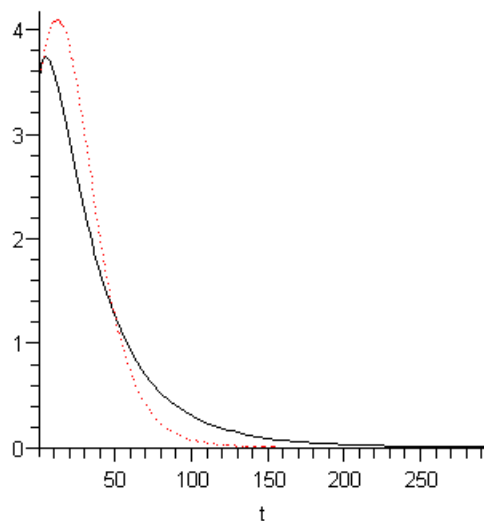


Рис. 27. Темпы добычи нефти вдоль рациональной кривой (сплошной линией), вдоль Траектории 3 (пунктиром) (в млрд. тонн\год).

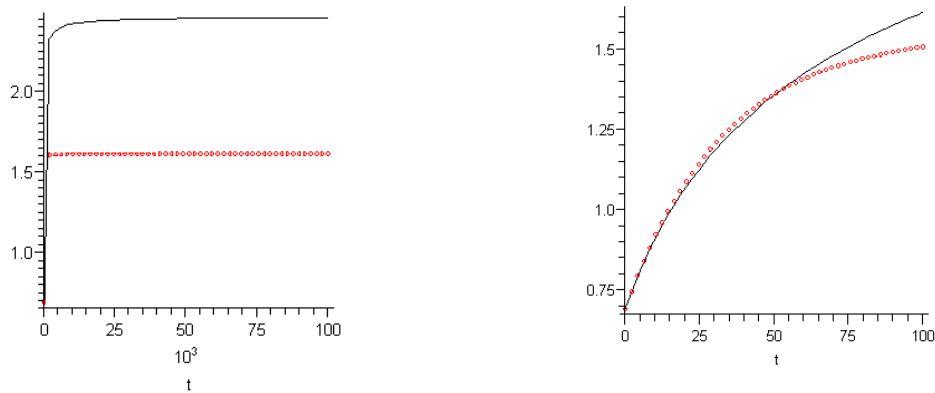


Рис. 28. Потребление, асимптотически постоянное в долгосрочном периоде, вдоль рациональной кривой (сплошной линией) и вдоль Траектории 3 (пунктиром).

Потребления вдоль траекторий в течение около 50 лет практически совпадают, но затем потребление вдоль рациональной переходной кривой более чем в полтора раза превышает потребление вдоль Траектории 3, что делает рациональную переходную траекторию более пригодной для практического применения.

5. Сценарии перехода к устойчивым темпам добычи нефти в России

5.1. Исходные данные и постановка задачи

Согласно Российской Энергетической Программе, представленной в статье министра энергетики России И. В. Юсуфова [журнал 'Нефть России', март 2004, № 3, с.12-14], темпы добычи нефти до 2020 года должны возрасти до уровня 0.45-0.52 млрд. тонн в год. По данным [Oil and Gas Journal, декабрь 2006, № 47, с.24-25] на начало 2006 года скорость исчерпания r_0 составляла 0.45 млрд. тонн в год, при имеющихся Российских запасах нефти $S_0 = 8.2$ млрд. тонн.

Для построения сценариев перехода к устойчивым траекториям добычи нефти в России будем использовать рациональные переходные кривые, оптимальные в смысле критерия (3b), поскольку этот критерий позволяет сочетать краткосрочные цели правительства с планами долгосрочного устойчивого развития.

При самом благоприятном для устойчивого развития варианте при реализации Энергетической Программы пик исчерпания должен наблюдаться в 2020 году, то есть через 14 лет, если брать за начало отсчёта 2006 год, $r_0 = 0.45$, $S_0 = 8.2$.

Допустимые траектории нефтедобычи будем искать по 2-м сценариям.

Сценарий 1.

Правительство реализует Энергетическую Программу, а начиная с 2020 года пытается перейти на устойчивые темпы добычи. При этом рассматриваются два случая:

- 1) минимальный, когда до 2020 года добыча идет постоянными темпами с $r_0 = r_{2006} = 0.45$, $S_0 = S_{2006} = 8.2$ и ускорением $A_0 = 0$. А уже с 2020 года строим устойчивую кривую исчерпания на основе рациональной переходной кривой с параметрами, удовлетворяющими условиям (1)-(3b), и начальными данными

$$r_{2020} = r_0, A_{2020} = A_0, S_{2020} = S_{14} = S_0 - \int_0^{14} r(t) dt.$$

- 2) максимальный, когда до 2020 года добыча линейно растёт при $r_0 = 0.45$, $S_0 = 8.2$ и в 2020 составляет $r_{2020} = 0.520$ млрд. тонн в год, то есть $r(t) = \lambda \cdot t + \mu$, $\mu = r(0) = r_0$,

$\lambda = (r_{14} - r_0)/14$. После 2020 года, также как и для минимального, строится оптимальная в смысле критерия (3b) траектория добычи с $r_{2020} = r_{14} = 0.520$, $A_{2020} = A_{14} = \lambda$, $S_{2020} = S_{14} = S_0 - \int_0^{14} r(t) dt$.

Сценарий 2.

Гипотетически предполагаем, что правительство, не дожидаясь 2020 года, уже с 2006 года начало бы переход на устойчивые темпы добычи (с минимальным «шоком» на ВВП и неумещающим потреблением). Возможны также два варианта построения траекторий:

- 1) минимальный, когда построение устойчивой траектории ведётся при начальных условиях $r_0 = r_{2006} = 0.45$, $S_0 = S_{2006} = 8.2$, A_0 равно начальному ускорению для 1-го минимального сценария $A_0 = 0$.
- 2) максимальный, когда устойчивая кривая строится при начальных данных $r_0 = r_{2006} = 0.45$, $S_0 = S_{2006} = 8.2$, A_0 равно начальному ускорению A_0 для 1-го максимального сценария $A_0 = \lambda$.

5.2. Построение траекторий

Для построения рациональной кривой, оптимальной в смысле критерия (3b), найдем значение параметра d , минимизирующее отрицательный «шок» на ВВП, поэтапно.

$$F_2(r(t)) = \min_t \left[\frac{A(t)}{r(t)} \right] \rightarrow \max_{r(t)}, \quad (3b)$$

1) найдем такие $t^* \geq 0$, что $\frac{d \left[\frac{A(t^*)}{r(t^*)} \right]}{dt} = 0$;

$$\frac{A(t)}{r(t)} = \frac{A_0 + bt}{r_0(1+ct) \left(1 + \left[c(d-1) + \frac{A_0}{r_0} \right] t \right)};$$

$$\frac{d \left[\frac{A(t)}{r(t)} \right]}{dt} = \frac{br_0(1+ct) \left(1 + \left[c(d-1) + \frac{A_0}{r_0} \right] t \right) - r_0(A_0 + bt) \left(c \left(1 + \left[c(d-1) + \frac{A_0}{r_0} \right] t \right) + (1+ct) \left[c(d-1) + \frac{A_0}{r_0} \right] \right)}{r_0^2(1+ct)^2 \left(1 + \left[c(d-1) + \frac{A_0}{r_0} \right] t \right)^2}.$$

Приравняв последнее к нулю, находим t^* :

$$t_1 = -\frac{A_0 + \sqrt{\left(A_0 - \frac{b}{c}\right)(A_0 + r_0 c(d-2))}}{b}, \quad t_2 = -\frac{A_0 - \sqrt{\left(A_0 - \frac{b}{c}\right)(A_0 + r_0 c(d-2))}}{b}. \quad (17)$$

Поскольку $b < 0$, то $t_2 < 0$ и, следовательно, единственным решением является $t_1^* = t_1(b(d), c(d), d) = t_1^*(d)$.

2) если $\frac{d^2(A(t)/r(t))}{dt^2}$ в точке $t = t_1^*$ больше нуля, то при t_1^* достигается минимум

$\min_t \left(\frac{A(t)}{r(t)} \right) = \frac{A(t_1^*)}{r(t_1^*)}$. В [3] показано, что при $b < 0, c > 0, d > 3$ это выполняется всегда.

3. Из уравнения $\frac{d(A(t_1^*)/r(t_1^*))}{d[d]} = 0$ находим d^* .

$$\frac{A(t_1^*)}{r(t_1^*)} = \frac{A_0 + b(d) \cdot t_1^*}{r_0 (1 + c(d) \cdot t_1^*) \left(1 + \left[c(d) \cdot (d-1) + \frac{A_0}{r_0} \right] t_1^* \right)}.$$

Тогда уравнение для нахождения d^* имеет вид

$$d \left(\frac{A_0 + b(d) \cdot t_1}{r_0 (1 + c(d) \cdot t_1) (1 + [c(d) \cdot (d-1) + A_0/r_0] t_1)} \right) / d[d] = 0. \quad (18)$$

4. Если

$$d^2 \left(\frac{A_0 + b(d) \cdot t_1}{r_0 (1 + c(d) \cdot t_1) (1 + [c(d) \cdot (d-1) + A_0/r_0] t_1)} \right) / d[d]^2 < 0 \quad (19)$$

при $d = d^*$, то

$$\max_d \left(\min_t \left(\frac{A(t)}{r(t)} \right) \right) = \max_d \left(\frac{A(t_1)}{r(t_1)} \right) = \frac{A_0 + b(d^*) \cdot t_1}{r_0 (1 + c(d^*) \cdot t_1) \left(1 + \left[c(d^*) \cdot (d^* - 1) + \frac{A_0}{r_0} \right] t_1 \right)}.$$

5.2.1. Сценарий 1-й минимальный

Предполагаем, что на интервале $t \in [0, 14]$ добыча является постоянной, то есть $r(t) = 0.45$, (Рис. 29-сплошной линией). Тогда к 2020 году имеем:

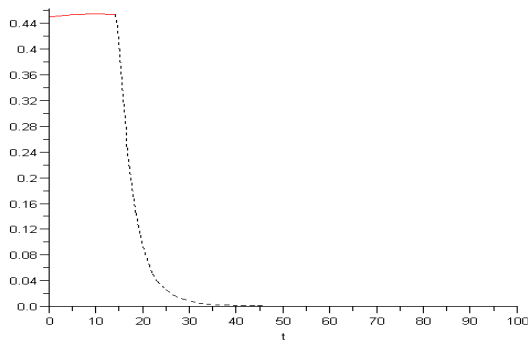


Рис. 29. Темпы добычи нефти для 1-го минимального сценария (млрд. тонн/год).

$r_{14} = 0.45, A_{14} = 0, \quad S_{14} = S_0 - \int_0^{14} r(t) dt = 8.2 - \int_0^{14} 0.45 dt = 8.2 - 6.3 = 1.9$. На основе этих данных находим параметры для рациональной переходной кривой.

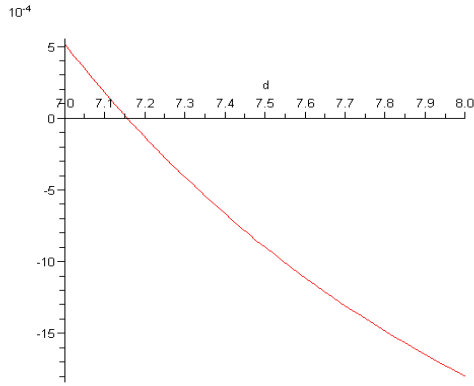


Рис. 30. Значение d для 1-го минимального сценария.

Из уравнения (18), поведение левой части которого изображено графически на рис. 30, численно находим $d=7.15$. Заметим, что при этом

$$d^2 \left(\frac{-0.00028 + b(d) \cdot t_1(d)}{0.4538(1 + c(d) \cdot t_1(d))(1 + [c(d) \cdot (d-1) - 0.0006] \cdot t_1(d))} \right) / d[d]^2 < 0,$$

то есть при данном значении d достигается максимум функции $A(t_1(d))/r(t_1(d))$.

Следовательно, темпы добычи после 2020 года описываются функцией $r(t) = 2.25(0.2 + 0.14t)/(1 + 0.12t)^{6.15}$, график которой изображен на Рис. 29 пунктирной линией. Так как $3 < (d=7.15) < 8$, то по Теореме 3 [3], имеем возрастающее на бесконечности потребление. В результате для 1-го минимального сценария с 2006 года получаем траекторию добычи нефти

$$r(t) = \begin{cases} 0.45, t \in [0, 14]; \\ \frac{2.25(0.2 + 0.14(t-14))}{(1 + 0.12(t-14))^{6.15}}, t \in [14, \infty). \end{cases}$$

Решив численно дифференциальное уравнение $\dot{k} = \beta k^\alpha r^\beta$ для данной траектории исчерпания $r(t)$ получаем траекторию потребления $c(t) = (1 - \beta)k^\alpha r^\beta$ (Рис. 31).

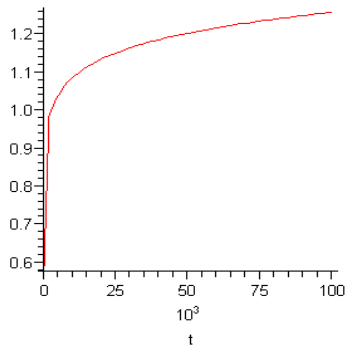


Рис. 31. Возрастающее потребление для 1-го минимального сценария.

5.2.2. Сценарий 1-й максимальный

При $t \in [0, 14]$ траектория добычи имеет вид $r(t) = \frac{r_{14} - r_0}{14}t + r_0$, которая после подстановки начальных значений запасов и добычи, а также $r_{14} = 0.52$, переписывается как $r(t) = 0.45 + 0.005t$ (Рис. 32 сплошной линией).

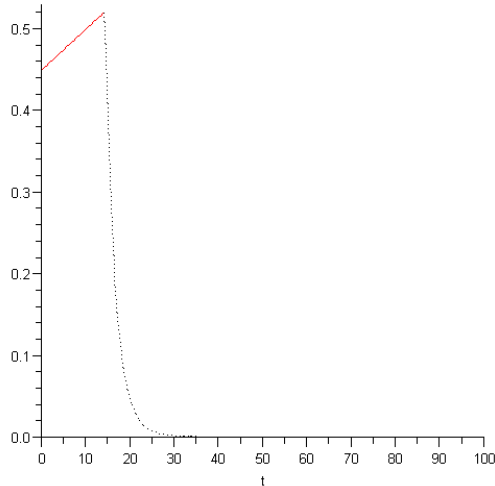


Рис. 32. Темпы добычи нефти для 1-го максимального сценария (млрд. тонн/год).

Получаем, что к 2020 году будем иметь $r_{14} = 0.52$, $A_{14} = 0.005$,
 $S_{14} = S_0 - \int_0^{14} r(t)dt = 8.2 - \int_0^{14} (0.005t + 0.45)dt = 8.2 - 6.79 = 1.41$. Численное решение (18) даёт нам $d = 7.11$, для которого выполняется (19) (Рис. 33).

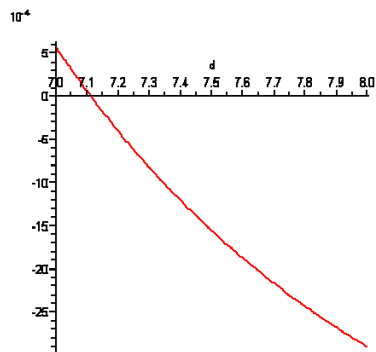


Рис. 33. Значение d для 1-го максимального сценария.

Тогда темпы добычи после 2020 года определяются функцией $r(t) = \frac{0.983(0.529 + 0.588t)}{(1 + 0.18t)^{6.1}}$, (Рис.32, пунктиром).

Так как $3 < d < 8$, потребление на бесконечности возрастает. В итоге для 1-го максимального сценария с 2006 года получаем траекторию добычи

$$r(t) = \begin{cases} 0.005t + 0.45, t \in [0, 14]; \\ \frac{0.983(0.529 + 0.588(t - 14))}{(1 + 0.118(t - 14))^{6.1}}, t \in (14, \infty). \end{cases}$$

График функции потребления вдоль этой траектории изображён на Рис. 34.

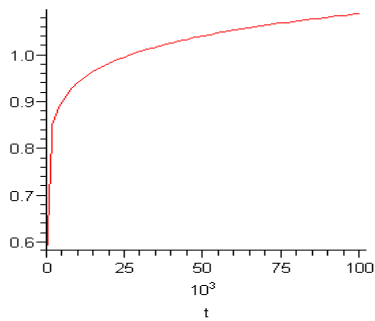


Рис. 34. Возрастающее потребление для 1-го максимального сценария.

5.2.3. Сценарий 2-й минимальный

Рассмотрим, что представляла бы из себя траектория добычи нефти, если бы правительство уже с 2006 года перешло на устойчивые темпы добычи. Для $r_0 = 0.45$, $S_0 = 8.2$, $A_0 = 0$, из условия (3b), проверив выполнение (18)-(19), находим $d = 7.09$ (Рис.35).

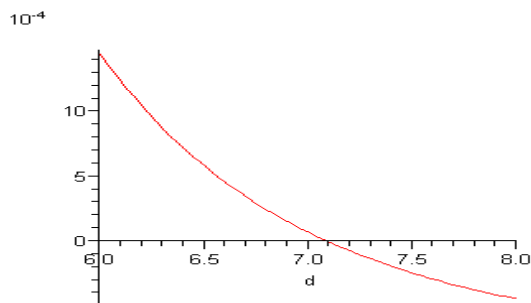


Рис. 35. Значение d для 2-го минимамального сценария.

Получаем траекторию истощения нефти для 2-го минимального сценария

$$r(t) = \frac{44.083(0.01 + 0.0017t)}{(1 + 0.027t)^{6.09}},$$

вдоль которой потребление растёт, так как $d < 8$.

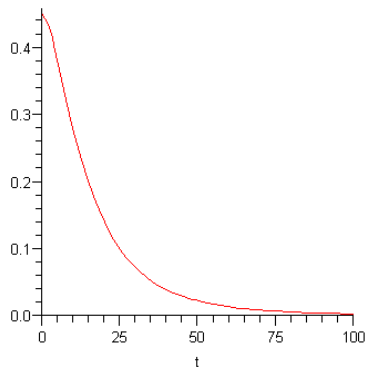


Рис. 36. Темпы добычи нефти для 2-го минимального сценария (млрд. тонн/год).

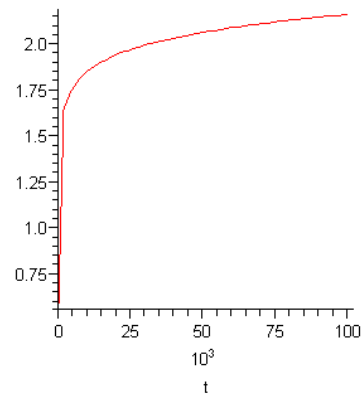


Рис. 37. Возрастающее потребление для 2-го минимального сценария.

5.2.4. Сценарий 2-й максимальный

Аналогично минимальному сценарию, используя начальные данные для запасов и добычи нефти $r_0 = 0.45$, $S_0 = 8.2$, $A_0 = 0.005$ из (18) находим $d=6.9$ (Рис.38).

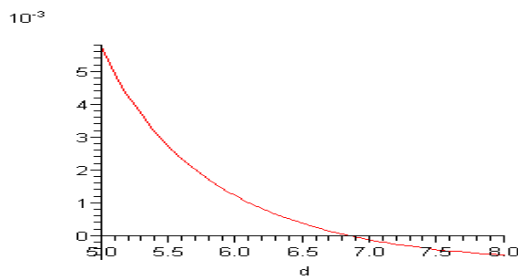


Рис. 38. Значение d для 2-го максимального сценария.

Так как данное d удовлетворяет (19), условие (3b) выполнено. Следовательно, траектория добычи нефти для 2-го максимального сценария с возрастающим потреблением ($d=7 < 8$) имеет вид $r(t) = \frac{40.47(0.011 + 0.002t)}{(1 + 0.029t)^6}$ (Рис.39).

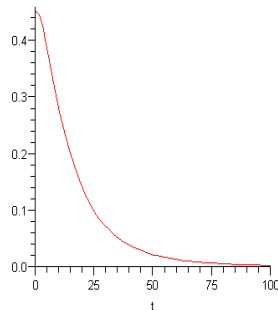


Рис. 39. Темпы добычи нефти для 2-го максимального сценария (млрд. тонн/год).

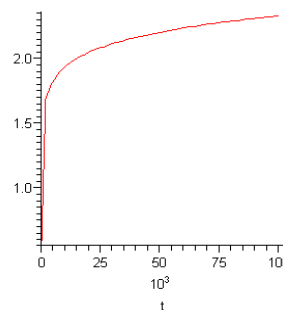


Рис. 40. Возрастающее потребление для 2-го максимального сценария.

Сравним экономические показатели для каждой из построенных траекторий. Так как потребление – основной показатель в сравнении траекторий, построим траектории для каждого из сценариев, вдоль которых потребление асимптотически постоянно, то есть для тех же траекторий, полученных выше из рациональной переходной кривой вместо найденных из условия (3b) d , дающих возрастающее потребление, возьмем $d = 8$ (согласно Теореме 3 в [3] только при этом d достигается постоянное потребление). Значения постоянного потребления приведены в последнем столбце Таблицы 1.

Сценарии		Максимальное изменение темпов добычи (A_{min})	Максимальное воздействие на ВВП при уменьшении добычи	Асимптота для потребления при $d = 8$
Сценарий 1	Минимальный	-0.092	-0.303	0.79
	Максимальный	-0.163	-0.466	0.655
Сценарий 2	Минимальный	-0.02	-0.067	1.48
	Максимальный	-0.022	-0.071	1.45

Таблица 1. Экономические показатели для различных сценариев перехода к устойчивым темпам добычи нефти в России.

Из таблицы видно, что наибольшее снижение темпов A_{min} добычи для 1-ого сценария, реализующего Энергетическую Программу и переходящего на устойчивые темпы истощения нефти только с 2020 года, в 4-8 раз превышает по абсолютной величине A_{min} для 2-ого, по которому уже с 2006 года имеем устойчивые темпы добычи, а снижение ВВП в 5-7 раз. Это свидетельствует о том, что для поддержания экономической стабильности и неубывающего потребления, темпы ввода замещающих технологий для 1-го сценария должны быть по крайней мере в 4 раза выше, чем для 2-го, что существенно уменьшает техническую возможность реализации сценария, включающего в себя выполнение Российской Энергетической Программы.

К тому же потребление после реализации Программы практически в 2 раза ниже по сравнению со 2-м сценарием. Из чего можно сделать вывод о важности скорейшего перехода на устойчивые темпы истощения нефти.

6. Заключение

В настоящей работе исследовались сценарии перехода российских темпов добычи нефти от растущих к устойчивым в смысле неубывающего потребления в долгосрочном периоде. Исследования основывались на методике построения переходных кривых, предложенной в [2,5]. По аналогии с рациональными кривыми истощения ресурса, рассмотренными в [2,5], в данной работе исследовались свойства переходных кривых, описываемых с помощью функций Хабберта и функций плотности некоторых непрерывных распределений случайных величин. Сравнение потребления вдоль этих траекторий показало, что только кривая, описываемая с помощью функции распределения Коши (Траектория 3) качественно сравнима с рациональной переходной кривой. При этом в долгосрочном периоде потребление вдоль рациональной кривой с асимптотически постоянным потреблением существенно (более, чем в 1,5 раза) больше, чем потребление вдоль Траектории 3.

Методика рациональных переходных кривых была применена для анализа переходных сценариев добычи нефти с учётом прогнозов Российской Энергетической Программы. Анализ показал, что реализация Программы приведёт к существенному усложнению технической задачи по переходу к устойчивым темпам добычи нефти в России и к более низкому (почти в 2 раза) уровню потребления в долгосрочном периоде.

7. Литература

1. Поляков Г. А., Полякова Т.В. (2004). Модели и прогнозные оценки перспектив добычи нефти. М.: РОССПЭН, 152 с.
2. Bazhanov A. V. (2006a). Decreasing of Oil Extraction: Consumption behavior along transition paths. MPRA Paper No. 469, posted October 16, 2006. Online at <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/469/>.
3. Bazhanov A. V. (2006b). The Peak of Oil Extraction and a Modified Maximin Principle. Proceedings of the Intern. Conf. "Comparative Institution and Political-Economy: Theoretical, Experimental and Empirical Analysis", Waseda University, Tokyo, Dec.22-23, 2006. P. 99-128. MPRA Paper No. 2019, posted 06. March 2007. Online at <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/2019/>.
4. Bazhanov A. V. (2007a). The peak of Oil Extraction and Consistency of the Government's Short- and Long-run Policies. MPRA Paper No.2507. Online at http://mpra.ub.uni-muenchen.de/2507/01/MPRA_paper_2507.pdf.
5. Bazhanov A. V. (2007b). The Transition to an Oil Contraction Economy. Ecological Economics, Vol. 64, No 1. P. 186-193.
6. Bazhanov A. V., Vyskrebentsev A. S. (2006). The Adequacy of Hubbert's Curves for the Forecasting of the Rates of Oil Extraction. MPRA Paper No 479, posted October 17, 2006. Online at <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/479/>.
7. Hartwick J. M. (1977). Intergenerational Equity and the Investing of Rents from Exhaustible Resources // The American Economic Review. Vol.67, No 5. P. 972-974.
8. Hubbert M. K. (1956). Nuclear Energy and the Fossil Fuels // Amer. Petrol. Inst. Drilling & Production Practice. Proc. Spring Meeting, San Antonio, Texas. P. 7-25.
9. Nordhaus W. D., Tobin J. (1972). Is economic growth obsolete? In: Economic Growth, 5th Anniversary Colloquium, V, National Bureau of Economic Research, New York. P. 1-80.
10. Solow R. M. (1974). Intergenerational Equity and Exhaustible Resources // The Review of Economic Studies. Vol. 41. Symposium on the Economics of Exhaustible Resources. P.29-45.